

**Lineare und nichtlineare Einflüsse von Gleitlagern auf das
Schwingungsverhalten schnell laufender und leicht belasteter
Vertikalrotoren**

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Ingenieurwissenschaften

vorgelegt von
M. Sc. Daniel Vetter
aus Naila

genehmigt von der Fakultät für Mathematik/Informatik und Maschinenbau
der Technischen Universität Clausthal

Tag der mündlichen Prüfung
31.07.2019

Dekan: Prof. Dr.-Ing. V. Wesling

Betreuer: Prof. Dr.-Ing. H. Schwarze

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. A. Rienäcker

Danksagung

Diese Arbeit ist während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter des Instituts für Tribologie und Energiewandlungsmaschinen der Technischen Universität Clausthal entstanden.

Mein besonderer Dank gilt meinem Doktorvater, Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Schwarze, für die interessante Aufgabenstellung, die zahlreichen Gespräche und den großen Freiraum beim Bearbeiten meiner Aufgaben.

Herrn Prof. Dr.-Ing. A. Rienäcker danke ich für das Interesse an dieser Arbeit, die Übernahme des Korreferates und für die lehrreichen fachlichen Gespräche.

Weiterhin gilt mein Dank allen aktuellen und ehemaligen Mitarbeitern und wissenschaftlichen Hilfskräften des Institutes, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben. Allen voran danke ich Herrn Dr.-Ing. T. Hagemann, der mich in besonderem Maße fachlich unterstützt hat.

Wesentliche Teile dieser Arbeit stammen aus dem Forschungsprojekt „Vertikalmaschinendynamik“ der Forschungsvereinigung für Verbrennungskraftmaschinen e.V. (FVV), das mit Mitteln des Bundesministeriums für Wirtschaft und Energie über die Arbeitsgemeinschaft industrieller Forschungsvereinigungen e.V. gefördert wurde. Den Mitgliedern des betreuenden Arbeitskreises Gleitlager der FVV und der Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (FVA) unter Leitung von Herrn Dipl.-Ing. A. Schmitz, Herrn Dipl.-Ing. A. Schubert und Herrn Dr.-Ing. Ü. Mermertas danke ich für die konstruktiven Anregungen in den zahlreichen Diskussionen.

Ein ganz besonderer Dank gilt meinen Eltern und Großeltern, sowie meiner Großtante und meinem Großonkel, für die finanzielle Unterstützung während meines Studiums und die ständige Ermutigung während meiner Zeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter.

Abstract

Gleitgelagerte, vertikale Maschinen stellen aufgrund der spezifischen Schmierfilmeigenschaften ein nichtlineares Schwingungssystem dar. Im Gegensatz zum Großteil der horizontalen Maschinen existiert in den Führungslagern vertikaler Rotoren keine definierte statische Gleichgewichtslage infolge einer Gewichtskraft. Da die durch Unwuchten oder andere Zwangsanregungen hervorgerufenen dynamischen Kräfte, gegenüber den statischen Kräften meist überwiegen, besitzt das Systemverhalten eine Abhängigkeit vom Betrag der anregenden Kraft.

Ziel der Arbeit ist die Entwicklung und Verifikation von Berechnungsmodellen und -algorithmen für die Analyse des Schwingungsverhaltens von Maschinen mit vertikalem Rotor. Hierfür werden systematisch Variationsrechnungen am nichtlinearen System mit unterschiedlicher Modelltiefe durchgeführt, um dessen Eigenschaften und Sensitivitäten besser zu verstehen. Dazu wird ein dynamisches Kippsegmentlagermodell entwickelt, in dem die Segmente als träge Körper abgebildet werden. Die Beschreibung der Schmierspaltströmung erfolgt mit der numerischen Lösung einer verallgemeinerten Reynolds'schen Differenzialgleichung unter Berücksichtigung der zeitlichen Ölmengenverteilung.

Als wesentliche Einflussgrößen auf das nichtlineare Resonanzverhalten haben sich die Verhältnisse von statischer zu dynamischer Last, sowie Lagersteifigkeit zu Abstützungssteifigkeit herausgestellt. Darüber hinaus können beim Kippsegmentlager Staudruckeffekte am Segmentbeginn und mechanische Segmentaufbiegungen einen signifikanten Einfluss auf das Resonanzverhalten besitzen.

In einigen Parameterbereichen kann eine lineare Beschreibung des Systems ausreichend sein. Zur quantitativen Beurteilung des Gültigkeitsbereiches linearer dynamischer Beschreibungen der Lagereigenschaften wird eine Störungsrechnung höherer Ordnung angewendet. Die Störungsrechnung führt auf ein nichtlineares Kraftgesetz für die Beschreibung der Schmierfilmrückstellkräfte. Dies ermöglicht die Verifizierung einer linearen Rotordynamikanalyse ohne die explizite Durchführung einer nichtlinearen Berechnung.

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	I
Symbolverzeichnis	III
1. Einleitung.....	1
1.1 Problemstellung.....	1
1.2 Stand der Forschung	4
1.3 Zielsetzung und Lösungsweg	10
2. Theoretische Modellbeschreibung	14
2.1 Methoden zur Lösung des dynamischen Rotor-Lager-Verhaltens.....	14
2.1.1 Lineare Analyse	14
2.1.2 Nichtlineare Analyse	15
2.2 Modellierung der elastischen Rotorwelle	17
2.3 Beschreibung des Radiallagermodells	20
2.3.1 Schmierspaltströmung und Druckverteilung.....	20
2.3.2 Segmentdynamik	24
2.3.3 Geometrische Beschreibung des Lagerspalts.....	27
2.3.4 Elastizität der Segmentabstützung	29
2.3.5 Festkörpertragdruck	31
2.3.6 Thermisches Lagermodell	32
2.3.7 Dynamische Schmierstoffmengenbilanz im hydrostatischen Taschenbereich.....	34
2.3.8 Beschreibung der dynamischen Lagerkräfte auf Basis einer Störungsrechnung.....	36
2.3.9 Linearisierte dynamische Lagereigenschaften	43
2.3.10 Erweiterte Lagermodellierung: Druckanstieg am Segmentbeginn und mechanische Segmentaufbiegung	44
2.4 Beschreibung des Axiallagermodells.....	49
2.4.1 Schmierspaltströmung und Druckverteilung.....	49

2.4.2	Linearisierte Axiallagerkoeffizienten	52
3.	Verifikation und Validierung des Lagermodells	56
3.1	Verifikation des volldynamischen Kippsegmentlagermodells	56
3.2	Validierung des volldynamischen Kippsegmentlagermodells	58
4.	Untersuchung des Systemverhaltens am vertikalen Lavalläufer .	62
4.1	Linearisierungshypothese.....	62
4.2	Variationsrechnungen am Lavalläufer in Kippsegmentlagern.....	65
4.2.1	Untersuchung verschiedener Lagervarianten	66
4.2.2	Einfluss der statischen Lagerlast.....	69
4.2.3	Einfluss des Druckanstiegs am Segmentbeginn und der mechanischen Segmentaufbiegung	71
4.3	Variationsrechnungen am Lavalläufer in Festsegmentlagern	75
5.	Näherungsverfahren	81
5.1	Näherungsverfahren für Festsegmentlager	81
5.1.1	Beschreibung des Verfahrens	81
5.1.2	Verifikation des nichtlinearen Näherungsverfahrens	84
5.1.3	Validierung des nichtlinearen Näherungsverfahrens	87
5.1.4	Berücksichtigung des veränderlichen Füllungsgrades	89
5.2	Näherungsverfahren für Kippsegmentlager	90
5.3	Gültigkeitsprüfung der linearen Theorie mittels Störungsrechnung höherer Ordnung	95
5.4	Approximation der kritischen Drehzahl vertikaler Maschinen	103
6.	Beispiele ausgeführter Maschinen	108
6.1	Hydro-Kraftwerksanlage mit Francis-Turbine in 3-Lager Anordnung.	108
6.2	Hydro-Kraftwerksanlage mit Pelton-Turbine und Kippsegmentlagern	122
6.3	Pumpenwelle einer Pumpspeicher-Hydrokraftwerksanlage	129
7.	Zusammenfassung	135
8.	Literaturverzeichnis	140

Symbolverzeichnis

A	Querschnittsfläche
A_i, A_0	Querschnittsfläche der Blende, Querschnitt vor der Blende
B	Breite
d	Dämpfungskoeffizient
\mathbf{D}	Dämpfungsmatrix
E	Elastizitätsmodul
e, e_m	Exzentrizität, Massenexzentrizität
\mathbf{F}, F	Vektor der äußeren Kräfte und Unwuchtkräfte, Kraft
F_0, \dots, F_4	Viskositätsfaktoren
f_c	Viskositätskorrekturfaktor für die Couette-Strömung
g	Ansatzfunktionen der Biegewinkel
G	Schubmodul
\mathbf{G}	Gyroskopische Matrix
h, H	Schmierspalthöhe, dimensionslose Schmierspalthöhe
J	Massenträgheitsmoment
K	Kavitationsindex
k	Steifigkeitskoeffizient
\mathbf{K}	Steifigkeitsmatrix
K_B	Blendendurchflussbeiwert
K_x, K_z	Turbulenzkorrekturfaktoren in Umfangs-, bzw. axialer Richtung
L	Länge
l_ζ, l_η	Hebelarm vom Segmentschwerpunkt zum Abstützpunkt in ζ , bzw. η -Richtung
M	Drehmoment
\mathbf{M}	Massenmatrix
N_x, N_z	Anzahl der Kontrollvolumen in Umfangs-, bzw. axialer Richtung
n	Ansatzfunktionen für die lateralen Verschiebungen
P	druckähnliche Variable
p	Schmierfilmdruck
\mathbf{q}, q	Zustandsvektor, Streckenlast
\dot{Q}	Volumenstrom
R	Lagerinnenradius
ΔR	radiales Lagerspiel, $\Delta R = R - r$
Re	Reynoldszahl, $Re = \rho \omega r \Delta R / \eta$

R_s	Segmentlaufbahnkrümmungsradius
r	Zapfenradius
s	Längenkoordinate
S_{max}	Maximalwert des Wellenausschlags vom Mittelwert
So	Sommerfeldzahl $So = \rho \psi^2 / (\eta \omega)$
T	kinetische Energie
t	Zeit
u	Knotenverschiebung
u, v, w	Geschwindigkeitskomponenten in x,y,z-Richtung
V	potenzielle Energie
W	Energie nichtkonservativer Kräfte
x, y, z	Kartesische Koordinaten
\mathbf{x}	Verschiebungsvektor
X, Y	Koordinaten im Bereich der Lagerstellen
\bar{X}, \bar{Y}	dimensionslose Koordinaten, $\bar{X} = X/\Delta R$, $\bar{Y} = Y/\Delta R$
y^*, z^*	dimensionslose Koordinaten, $y^* = y/\Delta R$, $z^* = z/r$
\tilde{y}	dimensionslose Spalthöhenkoordinate, $\tilde{y} = y/h$

Griechische Buchstaben

α	Winkel
γ	Zapfenverlagerungswinkel
ϵ, ϵ_m	relative Exzentrizität $\epsilon = e/\Delta R$, relative Massenexzentrizität $\epsilon_m = e_m/\Delta R$
ζ, η, θ	Segmentkoordinaten
θ	Spaltfüllungsgrad
κ	Schubfaktor
Π	dimensionsloser Druck $\Pi = p \psi^2 / (\eta_0 \omega)$
ρ	Dichte
φ	Winkel, Winkelkoordinate
δ	Variation
η	dynamische Viskosität
ψ	relatives Lagerspiel
ψ_v	Profilierung $\psi_v = (R_s - r)/\Delta R$
$\varphi_\zeta, \varphi_\eta, \varphi_\theta$	Segmentkippwinkel um die ζ, η, θ -Achsen
φ_x, φ_y	Zapfenkippwinkel um die x, y -Achsen
ω, ω_s	Winkelgeschwindigkeit, Kreisfrequenz der Schwingung

Indizes

\cdot	zeitliche Ableitung
$O-P$	Mittelpunkt-Spitze-Schwingweg
a	äquatorial
A, E	Austritt, Eintritt
ab	Abstützung
g	global
ges	gesamt
lr	Lagerring (Segmentträger)
m	Masse
mag	magnetischer Zug
min, max	Minimalwert, Maximalwert
n	Zeitschritt
p	polar
$P-P$	Spitze-Spitze-Schwingweg
r	Rotor
red	reduziert
res	resultierend
seg	Segment
sp	Schwerpunkt
$stat$	statischer Betriebspunkt
T	Tasche
um	Umgebung
w	Welle
x,y,z	globale Koordinaten
z	Zapfen
zu	Zuführung
φ	Rotation

Abkürzungen

HA	Halbachse einer ellipsenförmigen Bahnkurve
OFH	Oil-Film-History (Zeitabhängiger Füllungsgrad)
SBIV	Segmentbahn-Iterations-Verfahren
SBIV-T1	Segmentbahn-Iterations-Verfahren mit linearisierten Schmierfilmkräften
SBIV-T3	Segmentbahn-Iterations-Verfahren mit einer Approximation der Schmierfilmkräfte durch ein Taylor-Polynom dritter Ordnung

1. Einleitung

1.1 Problemstellung

Gleitgelagerte vertikale Maschinen werden schon viele Jahrzehnte z. B. in Form von Pumpen und Turbinen zusammen in einem Strang mit einem Motor oder Generator gebaut. Hierzu zeigt Abbildung 1.1 einen vertikalen Hydrogenerator bestehend aus einer Kaplan-Turbine (unten) und einem Generatorteil (oben). Der Strang besitzt drei radiale Führungslager sowie ein axiales Traglager.

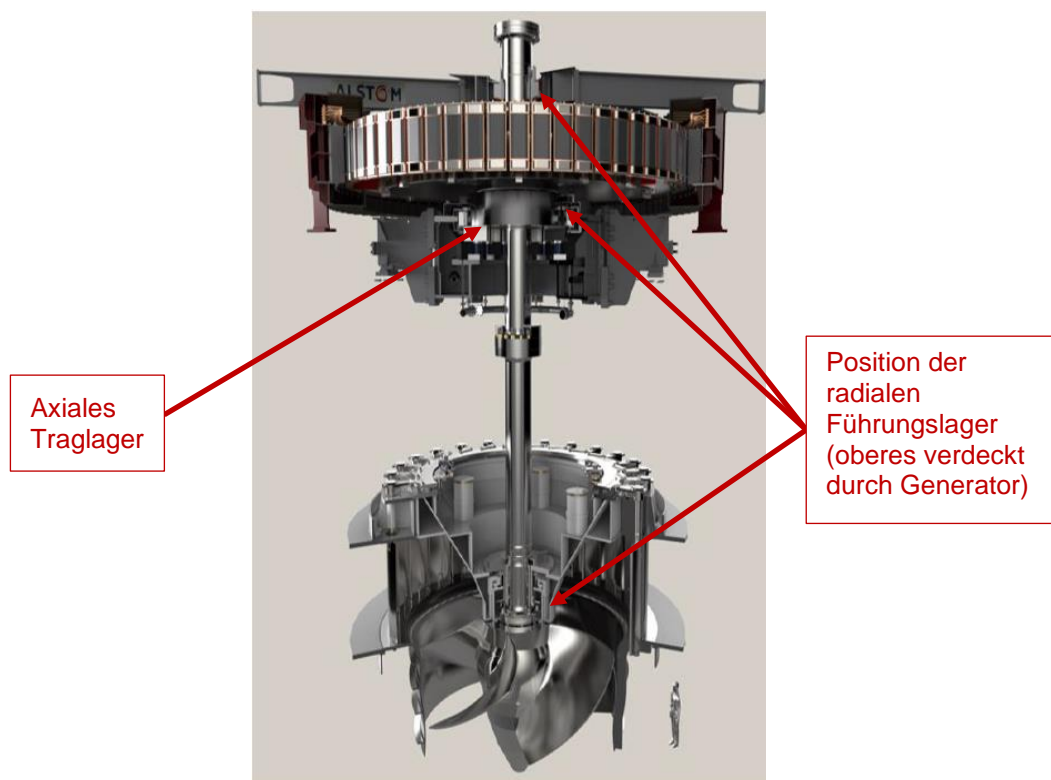


Abbildung 1.1: Vertikale Wasserkraftanlage

Im Gegensatz zum Großteil der horizontalen Maschinen gibt es bei vertikalen Rotoren keine definierte statische Gleichgewichtslage in den radialen Führungslagern infolge einer Gewichtskraft. Daher erfordert die Auslegung der Lagerung bei vertikalen Maschinen eine andere Vorgehensweise, um die geforderten Betriebseigenschaften zu erfüllen. Hierbei steht ein stabiler Betrieb mit hinreichend kleiner Schwingungsamplitude bei dynamischer Belastung des Rotor-Lager-Systems im Vordergrund. Es existiert jedoch keine allgemein anerkannte Berechnungsvorschrift zur Auslegung dieser Maschinentypen, weshalb meist vereinfachte Ansätze auf Basis linearer rotordynamischer Analysen Anwendung finden. Grundsätzlich stellen gleitge-

gelagerte vertikale Maschinen jedoch ein nichtlineares Schwingungssystem dar, dessen Nichtlinearität aufgrund der geringen statischen Belastung der radialen Führungslager signifikant das rotordynamische Verhalten im Betrieb beeinflusst. Es liegen keine Untersuchungen vor, die genauere Hinweise über die Zuverlässigkeit linearer Approximationen für einzelne Systemgrößen wie z.B. die Frequenz der ersten kritischen Drehzahl liefern. Obwohl vertikale Maschinen zumeist unterkritisch betrieben werden, ist die Kenntnis der kritischen Drehzahl aus Spezifikationsgründen von besonderer Bedeutung. Im Rahmen dieser Arbeit wird die kritische Drehzahl als Drehzahl der maximalen Resonanzüberhöhung definiert.

Lineare Rotordynamikprogramme sind meist auf die Berechnung horizontaler Maschinen ausgelegt. Bei diesen Maschinen und allen anderen, bei denen eine definierte und ausreichend hohe Krafrichtung auf die Radiallager wirkt, kann ein statischer Gleichgewichtspunkt angegeben werden, bei dem die Lagerkräfte mit den äußeren Kräften im Gleichgewicht stehen. Ist die Gleichgewichtslage bekannt, können die nichtlinearen Lagerrückstellkräfte um diesen Punkt linearisiert und mit Hilfe der je vier Steifigkeits- und Dämpfungskoeffizienten approximiert werden. In vielen Fällen kann mit diesem Vorgehen eine gute Genauigkeit bezüglich der Schwingungsamplituden und der Stabilitätsgrenze erzielt werden [1], sofern keine zu großen dynamischen Lagerkräfte z.B. infolge einer Beschädigung des Rotors vorliegen, die die Gültigkeit der linearen Approximation aufheben. Wird dieses Verfahren auf vertikale Maschinen angewendet, die keine definierte statische Krafrichtung zum Beispiel durch magnetischen Zug o. Ä. aufweisen, befindet sich die statische Gleichgewichtslage des Lagerzapfens theoretisch im Lagerzentrum. Die dieser Wellenlage zugeordneten dynamischen Lagereigenschaften erweisen sich zumeist als zu ungünstig, um eine realitätsnahe Vorhersage für die Größe der kreisbahnähnlichen Schwingbewegung zu liefern. Die Grenzen der linearen Theorie zeigen sich unter anderem beim niedrig belasteten kreiszylindrischen Lager. Das so gelagerte Rotor-Lager-System ist bereits bei sehr geringer Drehzahl linear instabil. Durch geeignete Maßnahmen kann jedoch ein stabiler Betrieb in weiten Drehzahlbereichen ermöglicht werden, z.B. [2]. Ein praktisches Beispiel hierfür stellt der Abgasturbolader für PKW-Anwendungen dar. Bei Gleitlagern sind die Feder- und Dämpfungskoeffizienten im Lagerzentrum am kleinsten und die Steifigkeit des Lagers wird bei einer Linearisierung um die zentrische Zapfenlage deshalb in vielen Fällen als zu gering angenommen, um das Betriebsverhalten eines Rotor-Lager-Systems realitätsnah beschreiben zu können [3].

Im Gegensatz zu horizontalen Maschinen sind die dynamischen Lagerbelastungen bei vertikalen Maschinen in vielen Fällen wesentlich höher als die statischen. Infolge des progressiven Anstiegs der Lagerrückstellkraft mit zunehmender Zapfenauslenkung werden somit die Systemeigenschaften durch die äußere Anregung beeinflusst. Die Berücksichtigung dieser speziellen Verhältnisse bei der Linearisierung des Systems ist grundsätzlich erforderlich, um einen zufriedenstellenden Gültigkeitsbereich zu erreichen. Diese Unsicherheiten im Rahmen des Auslegungsprozesses führen häufig zum Einsatz kostenintensiver Kippsegmentlager, die zwar sehr gute Stabilitätseigenschaften aufweisen, jedoch aufgrund ihrer spezifischen konstruktiven Eigenschaften vielfach nur eine unzureichende Dämpfung liefern. Ein weiteres Problem der Linearisierung dynamischer Lagereigenschaften ist die generelle Unschärfe bezüglich ihres Gültigkeitsbereichs. Hierfür existieren keine praxisgerechten Kriterien, die es dem Berechnungsingenieur ermöglichen, die Grenzen des Anwendungsbereiches unter Berücksichtigung der geforderten Genauigkeiten festzulegen.

Des Weiteren besitzen Axiallager durch ihre Kippsteifigkeit direkte Rückwirkungen auf die lateralen Schwingungen, wobei vor allem konische Schwingformen beeinflusst werden, da diese die größten Schiefstellungen bzw. Rückstellmomente im Axiallager hervorrufen [4, 5]. Ein indirekter Einfluss des Axiallagers entsteht durch die veränderte Radiallagerbelastung infolge eines statisch überbestimmten Rotor-Lager-Systems. Bei vertikalen Maschinen wird das Eigengewicht von den Axiallagern aufgenommen, die daher auch als Traglager bezeichnet werden. Dies führt insbesondere bei großen Maschinen zu stark belasteten Axiallagern, womit in der Regel auch hohe Kippsteifigkeiten der Lager einhergehen. Trotzdem existieren keine Arbeiten, die den Einfluss des Axiallagers auf das Schwingungs- und Stabilitätsverhalten vertikaler Maschinen systematisch untersuchen.

Die Unsicherheiten bei der Auslegung vertikaler Maschinen wurden schon früh in der Literatur dokumentiert. Hierzu wird von *Utecht* [6] im Jahr 1991 eine Vorgehensweise zur Auslegung vertikaler Maschinen für den überkritischen Betrieb beschrieben. Diese orientiert sich bezüglich der Lagerauslegung an der Arbeit von *Merker* [3]. Aufgrund limitierter Berechnungsmöglichkeiten waren diverse Unsicherheiten vorhanden, so dass ohne genauere Prüfung des Lagerkonzeptes bei *Utechts* Neuentwicklung ein Kippsegmentlager eingesetzt wurde, um die Gefahr von Instabilitäten zu minimieren. Zusätzlich wurden zahlreiche, teils kostenintensive Änderungsmöglichkeiten eingeplant, um die ausgeführte Maschine im Fall eines unruhigen Laufs stabilisie-

ren zu können. Dieses Beispiel dokumentiert die Unsicherheiten, die in den Unternehmen bei der Auslegung vertikaler Maschinen vorliegen und trotz kontinuierlicher Fortschritte im Bereich der Simulationstechnik bis heute nicht beseitigt worden sind. Das Fehlen von Berechnungsgrundlagen zwingt die Unternehmen, aufwändige Lösungen in Kauf zu nehmen, um Schäden an den sehr teuren Maschinen durch Maßnahmen wie, etwa die Überdimensionierung der Komponenten zu vermeiden.

Um mehr Auslegungssicherheit zu gewährleisten, wird in dieser Arbeit eine Vorgehensweise entwickelt, die speziell auf die Anforderungen vertikaler Maschinen angepasst ist und alle relevanten Effekte berücksichtigt, die im Rahmen umfangreicher Parameterstudien identifiziert werden. Hierdurch sollen die zuvor beschriebenen Defizite in der Modellbildung zur theoretischen Analyse vertikaler Maschinen beseitigt werden, um derartige Anwendungen im Rahmen eines effizienteren Auslegungsprozesses zukünftig besser und zuverlässiger realisieren zu können.

1.2 Stand der Forschung

Lineare Rotordynamik

Die für die Praxis relevanten Phänomene der linearen Rotordynamik wurden ausgiebig erforscht und können mit Methoden der linearen Schwingungstheorie beschrieben werden. Als umfassendes deutschsprachiges Standardwerk ist z. B. das Lehrbuch von *Gasch, Nordmann* und *Pfützner* zu nennen [7].

Nichtlineare Lagerrückstellkräfte

Die erweiterte und verallgemeinerte Reynolds'sche Differenzialgleichung beschreibt die nichtlinearen Schmierfilmkräfte in den meisten Anwendungsfällen mit ausreichender Genauigkeit. Für eine physikalisch konsistente Berücksichtigung des zeitlich veränderlichen Spaltfüllungsgrades ist die direkte, zeitliche Lösung der Reynolds'schen Differenzialgleichung erforderlich, z. B. [8, 9, 10, 11, 12]. Da diese Vorgehensweise sehr rechenzeitintensiv ist wurden Näherungsmethoden entwickelt, die jedoch häufig die Kontinuität des Schmierstoffgehalts im Lager verletzen und somit immer einen Kompromiss aus Rechenzeit und Genauigkeit darstellen. Eine bekannte Methode ist die „Mobility-Methode“ [13], nach der die Geschwindigkeit des Lagerzapfens für eine gegebene Lagerkraft bestimmt werden kann. Die Methode erfordert die Erstellung von Vektorfeldern, die den Zusammenhang von Lagerkraft und Geschwindigkeit beschreiben. Die so genannte Impedanz-Methode [14] stellt die Umkehrung

der Mobility-Methode dar und ermöglicht somit die Berechnung der Lagerkraft für eine gegebene laterale Zapfenposition und –geschwindigkeit. Hierbei erfolgt die Beschreibung der Bewegung in einem rotierenden Koordinatensystem, so dass die Bewegung in einen reinen Verdrängungszustand überführt werden kann. Aufgrund des rotierenden Koordinatensystems ist die Berücksichtigung einer in Spaltumfangsrichtung veränderlichen Schmierspaltgeometrie nicht möglich. Weitere Ansätze nutzen die Linearität der Reynolds’schen Differenzialgleichung bezüglich des Drucks aus, um die Gleichung in zwei Anteile aufzuspalten [15], [16]. Der erste Anteil beschreibt den Druck aufgrund einer reinen Zapfenrotation und der zweite aufgrund der Verdrängung. Die Gesamtlösung ergibt sich durch Superposition beider Anteile, wobei jedoch Annahmen bezüglich des Kavitationsgebietes getroffen werden müssen. Bei der Methode nach *Butenschön* [16] werden die negativen Drücke beider Anteile vernachlässigt und die Kräfte addiert. Nach *Hahn* [15] erfolgt zuerst eine Überlagerung der Drücke beider Lösungen und anschließende Vernachlässigung der negativen Drücke. Ansätze zur Berechnung segmentierter und nicht kreiszylindrischer Lager sind unter anderem in [17, 18, 19, 20, 21] aufgeführt. Die in dieser Arbeit eingesetzte Näherungsmethode [17] nutzt ebenfalls die Drucklinearität der Reynolds’schen Differenzialgleichung zur Aufteilung der Gleichung in zwei Anteile. Hierbei erfolgt die Annahme, dass die Zapfenrotation den Spaltfüllungsgrad maßgeblich bestimmt. Die Lösungen der sich daraus ergebenden Gleichungen werden tabelliert und zur Bestimmung der Gesamttragkraft additiv überlagert. Hierbei wird der instationäre Anteil durch vier Dämpfungskoeffizienten abgebildet. In [19] wird die Reynolds’sche Differenzialgleichung in Bewegungsanteile einer reinen Zapfenrotation, einer Umlaufbewegung und einer radialen Verdrängungsbewegung aufgeteilt und unabhängig voneinander gelöst. Die Aufteilung in drei fundamentale Bewegungsarten ermöglicht ebenfalls die Anwendung als Kennfeldverfahren, wodurch jedoch auch Annahmen für die Ölmengenverteilung getroffen werden müssen. In [20, 21] erfolgt die direkte Lösung der Reynolds’schen Differenzialgleichung unter Voraussetzung eines parabelförmigen Druckverlaufes in axialer Richtung.

Stabilitäts- und Bifurkationsverhalten vertikaler Maschinen

Die dynamischen Unwuchtkräfte verursachen in der Regel den größten Teil der Lagerkräfte vertikaler Maschinen. Bei kreiszylindrischen Lagern und Kippsegmentlagern mit vielen Segmenten bewegt sich der Zapfen im Lager infolge der Unwuchterregung näherungsweise auf einer Kreisbahn. Aus dem Kräftegleichgewicht von Un-

wuchtkraft und nichtlinearer Lagerkraft kann der Radius der quasistationären Kreisbahn berechnet werden. *Merker* [3] hat auf diese Weise das Lösungsverhalten eines starren und eines elastischen Rotors systematisch untersucht. Er konnte zeigen, dass es für eine gegebene Unwuchtanregung mehr als eine Lösung gibt. So existieren bei einem starren Rotor meist drei Lösungen mit unterschiedlichen Radien. Während die mittlere dieser Lösungen immer instabil ist, sind die beiden anderen gegen kleine Störungen lokal stabil. Die Lösung mit dem größten Radius ist auch gegen große Störungen robust und somit global stabil. Weiter stellte er fest, dass sich in Bereichen, in denen kein stabiler Gleichgewichtszustand existiert, meist eine Schwingung mit halber Drehfrequenz einstellt.

Weber und Nordmann haben in [22] das Biegeschwingsverhalten einer vertikalen Kondensatpumpe untersucht, welche in vier Dreiflächenlagern gelagert wurde. Es konnten neben den drehzahlsynchronen Schwingungen starke halbfrequente Schwingungen nachgewiesen werden. Variationsrechnungen haben gezeigt, dass sich in diesem speziellen Fall eine Vergrößerung der Unwucht stabilisierend auf das Schwingungsverhalten auswirkt. Es verkleinert sich der maximale Bahnradius an drei der vier Lagerstellen deutlich. Die Autoren empfehlen für diesen Anwendungsfall eine Vergrößerung der Erregeramplitude zur Stabilisierung der Maschine. Ähnliche Ergebnisse werden von *White et al.* [23], sowie *Shi et al.* [24] vorgestellt, wobei zusätzlich auf den starken Einfluss des Radialspiels hingewiesen wird. Es wird gezeigt, dass eine Vergrößerung des Lagerspiels einer vertikalen, mehrstufigen Pumpe sowohl die Lagersteifigkeit als auch die Systemdämpfung verringert, was zu einer Herabsetzung der kritischen Drehzahl führt [23]. *Springer* [25] untersucht numerisch das Schwingungsverhalten eines vertikalen Pumpturbinenrotors mit vier Radialkippssegmentlagern. Die Berechnung der Schmierfilmkräfte erfolgt durch ein Näherungsverfahren, bei dem die Lösung der Reynolds'schen Differenzialgleichung in einer Tschebyscheff-Reihe entwickelt wurde. Seine Ergebnisse zeigen, dass die Dämpfungs- und Steifigkeitseigenschaften der Kippsegmentlager von der Höhe der Zapfenschwingungsausschläge und der Erregerfrequenz der Störkräfte abhängig sind. Weiter empfiehlt er, insbesondere bei transienten Betriebszuständen eine nichtlineare Abbildung der Schmierfilmeigenschaften in der Berechnung anzuwenden.

Dynamische Eigenschaften von Kippsegmentlagern

Lund [26] formuliert eine dynamische Lagerbeschreibung unter expliziter Berücksichtigung aller relevanten Bewegungsfreiheitsgrade (Verlagerung in Richtung des Abstützpunktes und Kippung um den Abstützpunkt) und gibt eine Methode zur Reduktion der Freiheitsgrade an. Unter Annahme harmonischer Bewegungen von Zapfen und Segmenten, sowie der Vorgabe der Schwingfrequenz, können die Segmentfreiheitsgrade aus dem Gleichungssystem eliminiert werden. Das reduzierte System besitzt nur noch die Zapfenfreiheitsgrade und lässt sich somit, genau wie bei Festsegmentlagern üblich, mit je vier Steifigkeits- und Dämpfungskoeffizienten beschreiben. Ein Nachteil der Berücksichtigung aller Segmentfreiheitsgrade ist die schwierige Interpretation der Lagereigenschaften ohne die Durchführung einer Rotordynamikanalyse [27]. Dies kann insbesondere dann zu Schwierigkeiten führen, wenn Rotor- und Lagerberechnung nicht in einer Hand liegen [27]. Obwohl sich die Berücksichtigung aller Segmentfreiheitsgrade als die genaueste Beschreibung der linearisierten dynamischen Kippsegmentlagerkoeffizienten auszeichnet und die Reduktion der Freiheitsgrade keineswegs unproblematisch ist, hat sich die Nutzung der reduzierten Beschreibung etabliert. Die Systemreduktion erfolgt meist unter Annahme einer drehzahlsynchronen Schwingungsfrequenz. Prinzipiell kann die Reduktion unter Vorgabe jeder beliebigen Schwingfrequenz erfolgen. Der so gewonnene Satz Koeffizienten gibt das dynamische Zwangsschwingungs-Verhalten bei der Reduktionsfrequenz exakt wieder. Später weist *Lund* [28] darauf hin, dass für die Berechnung des Eigenverhaltens der komplexe Eigenwert zur Modellreduktion eingesetzt werden muss. Dieser enthält neben der Kreisfrequenz auch die Abklingkonstante der Schwingung. Beispielsweise zeigen hierzu Modellreduktionen an einem 5-Kippsegmentlager, dass unter Annahme einer abklingenden Bewegung die Lagerdämpfung in der Regel geringer ausfällt als bei einer Bewegung konstanter Amplitude [27].

Wilkes und *Childs* [29] zeigen anhand von theoretischen und experimentellen Untersuchungen an einem Kippsegmentlager mit 100 mm Durchmesser und 5 Segmenten, dass die Übertragungsfunktion des Lagers für Störungen des Zapfens und des Lagers praktisch übereinstimmen. Eine Erhöhung der Segmentmasse um das Zehnfache führte hingegen zu signifikanten Unterschieden. Ferner wird darauf hingewiesen, dass der Unterschied mit abnehmender Schmierfilmsteifigkeit deutlich zunimmt. Die gleichen theoretischen Untersuchungen an einem 479 mm Kippsegmentlager mit 4 Segmenten zeigen einen zunehmenden Unterschied mit abnehmender Last und

steigendem Frequenzverhältnis. Das Frequenzverhältnis beschreibt das Verhältnis zwischen Schwingungsfrequenz und Drehfrequenz der Welle.

In [30] wird die Stabilitätsgrenze eines starren Rotors, der mit einem Kippsegmentlager mit zwei Segmenten gelagert ist, am linearen und nichtlinearen Modell theoretisch untersucht. Das Modell berücksichtigt zwar die Kippbeweglichkeit der Segmente, jedoch nicht die radiale Abstützungselastizität. Mit steigendem Massenträgheitsmoment geht das dynamische Verhalten des Kippsegmentlagers in das eines Festsegmentlagers über. Die Stabilitätsgrenze des Rotor-Lager-Systems strebt mit abnehmendem Massenträgheitsmoment asymptotisch gegen Unendlich.

Die Abstützungseigenschaften der Kippsegmente können das dynamische Verhalten wesentlich beeinflussen. Es konnte gezeigt werden, dass die radiale Elastizität der Abstützung die Steifigkeit und Dämpfung des Lagers herabsetzen. Wobei jedoch der Abfall der Dämpfung stärker als der der Steifigkeit ist, was demzufolge den Dämpfungsgrad des Systems verschlechtert. Weiter konnte gezeigt werden, dass eine Kippbehinderung der Segmente zur Entstehung von ungleichen Koppelsteifigkeiten führt, wodurch das Rotor-Lager-System dynamisch instabil werden kann [31, 32, 33].

Für eine nichtlineare Beschreibung der Kippsegmentlagerkräfte ist die Kenntnis der Segmentbewegung erforderlich. Dies ermöglicht die Bestimmung der Schmierfilmmkräfte mit der Relativbewegung von Zapfen und Segmenten. Zur Berechnung der Segmentstellung werden die Bewegungsdifferentialgleichungen der Segmente gelöst, z. B. [34, 35, 36].

Beschreibung der nichtlinearen Lagerkräfte auf Basis einer Störungsrechnung

Die vier Steifigkeits- und Dämpfungskoeffizienten zur Beschreibung der linearisierten, dynamischen Lagerkraft werden aus der Lösung von vier Störungsgleichungen gewonnen, die infolge einer Störung der Zapfenlage aus der Reynolds'schen Differentialgleichung abgeleitet werden. Hierzu werden die Terme der Zapfenverlagerung und -geschwindigkeit separiert. Die Störungsgleichungen wurden von zahlreichen Autoren hergeleitet und angewendet, z. B. [37, 38, 39, 40, 41]. Hierbei wurde die Modellierungstiefe kontinuierlich gesteigert, um beispielsweise Schmierstoffzuführungs- oder -verschäumungseinflüsse abbilden zu können. Im Rahmen dieser Störungsrechnungen werden ausschließlich Terme erster Ordnung verwendet, da Terme höherer Ordnung zur Beschreibung linearer Systeme keine Relevanz besitzen. Grund-

sätzlich können Terme höherer Ordnung jedoch Hinweise auf die Grenzen der Gültigkeit der linearen Approximation liefern.

Eine grundlegende Untersuchung zur Beschreibung der nichtlinearen, statischen Lagerkräfte mittels Koeffizienten höherer Ordnung wurde in [42, 43] durchgeführt. Die Berechnung der Koeffizienten erfolgte hierbei jedoch nicht mit Hilfe der Störungsgleichungen, sondern durch Bildung numerischer Differenzenquotienten durch direktes Einsetzen der gestörten Zapfenposition in die Reynolds'sche Differenzialgleichung. Hierdurch wurden Koeffizienten bis zur siebten Ordnung an einem Kreislager ermittelt. In der Nähe des statischen Betriebspunktes wurde gegenüber den linearisierten Lagerkräften eine bessere Approximationsgüte erreicht. Bei größerer Entfernung vom statischen Betriebspunkt soll jedoch die nichtlineare Approximation mittels Koeffizienten höherer Ordnung zu größeren Fehlern als die lineare Berechnung führen. Eine Methode zur Beschreibung der nichtlinearen Lagerkräfte auf Basis der Störungsrechnung wird in [44] angegeben, wobei die Koeffizienten höherer Ordnung durch eine Änderung der Koeffizienten erster Ordnung ausgedrückt werden. An einer beispielhaften Zapfenbewegung wird der Verlauf der Koeffizienten bis zur zweiten Ordnung dargestellt. Die Störungsgleichungen werden jedoch nicht explizit angegeben. Zhao [45] beschreibt die Taylorreihe zur Beschreibung der Lagerkräfte bis zur dritten Ordnung inklusive der gemischten Terme von Geschwindigkeit und Auslenkung. Für eine gemessene Bahnkurve und Lagerkräfte werden die Taylor-Koeffizienten mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate bestimmt, woraufhin die Koeffizienten höherer Ordnung als gut geeignet zur Beschreibung der nichtlinearen Lagerkräfte angesehen werden. Eine Beschreibung der Störungsgleichungen bis zur zweiten Ordnung wird in [46] durchgeführt, wobei stark vereinfachte Annahmen hinsichtlich der Strömungsverhältnisse im Radialgleitlager getroffen werden und wichtige Zusatzeffekte wie eine veränderliche Schmierstoffviskosität oder Schmierfilmturbulenz nicht betrachtet werden.

Aus Symmetriegründen verschwinden die Koeffizienten zweiter Ordnung im Lagerzentrum, was sie für die Beschreibung vertikaler Maschinen ungeeignet macht. Um eine Aussage über die nichtlinearen Lagerkräfte zu erhalten, müssen daher mindestens Terme dritter Ordnung berücksichtigt werden.

Axiallagereinfluss

Der Axiallagereinfluss auf die lateralen Schwingungen horizontaler Rotoren wurde z. B. in [47] experimentell und rechnerisch untersucht. Es konnte je nach konstruktiver Gestaltung des Rotors eine versteifende, dämpfende oder anfachende Wirkung nachgewiesen werden. Während die anfachende Wirkung in der Regel vernachlässigbar klein bleibt, wurde ein wesentlicher Einfluss auf die Stabilitätsgrenze, die Resonanzdrehzahlen und deren Amplitudenerhöhungen festgestellt. In der Messung an einem Testrotor wurde eine Erhöhung der Stabilitätsgrenze um ca. 50% infolge einer Reduktion des Axialspiels sowie eine Verschiebung der ersten Resonanzstelle durch das Aufbringen einer Axiallast identifiziert. Andere Wissenschaftler berichten ebenfalls von signifikanten Einflüssen von Axialgleitlagern auf das Querschwingungsverhalten von Rotoren [47, 48, 49, 50, 51, 52]. In [5, 53] wird der starke Einfluss des Axiallagers auf konische Schwingungsformen detailliert analysiert. Grundsätzlich kann der Einfluss des Axialgleitlagers auf Basis der Schwingungsformen beurteilt werden und ist somit auch für vertikale Rotoren zu erwarten, da diese auch konische Schwingformen aufweisen können.

1.3 Zielsetzung und Lösungsweg

Ziel dieser Arbeit ist die Entwicklung und Verifikation von Berechnungsmodellen und -algorithmen für die Analyse des Schwingungsverhaltens von Maschinen mit vertikalem Rotor. Hierfür werden systematisch Variationsrechnungen am nichtlinearen System durchgeführt, um dessen Eigenschaften und Sensitivitäten besser zu verstehen. Dabei sollen vor allem das Verhältnis von dynamischer zu statischer Last und das Verhältnis von Schmierfilmsteifigkeit und Segment- bzw. Lagerabstützungssteifigkeit betrachtet werden. Hierzu zeigt Abbildung 1.2 exemplarisch ein mechanisches Ersatzbild des vertikalen Hydrogenerators nach Abbildung 1.1, das in der Folge für die Erläuterung der Vorgehensweise im Rahmen der theoretischen Modellbildung und Analysen verwendet wird. In der Mitte befindet sich der elastische Rotor, der mit den Lagermodellen gekoppelt wird. Die Lager besitzen, je nach Modelltiefe, eine Eigendynamik und eine elastische Abstützung an die Umgebung.

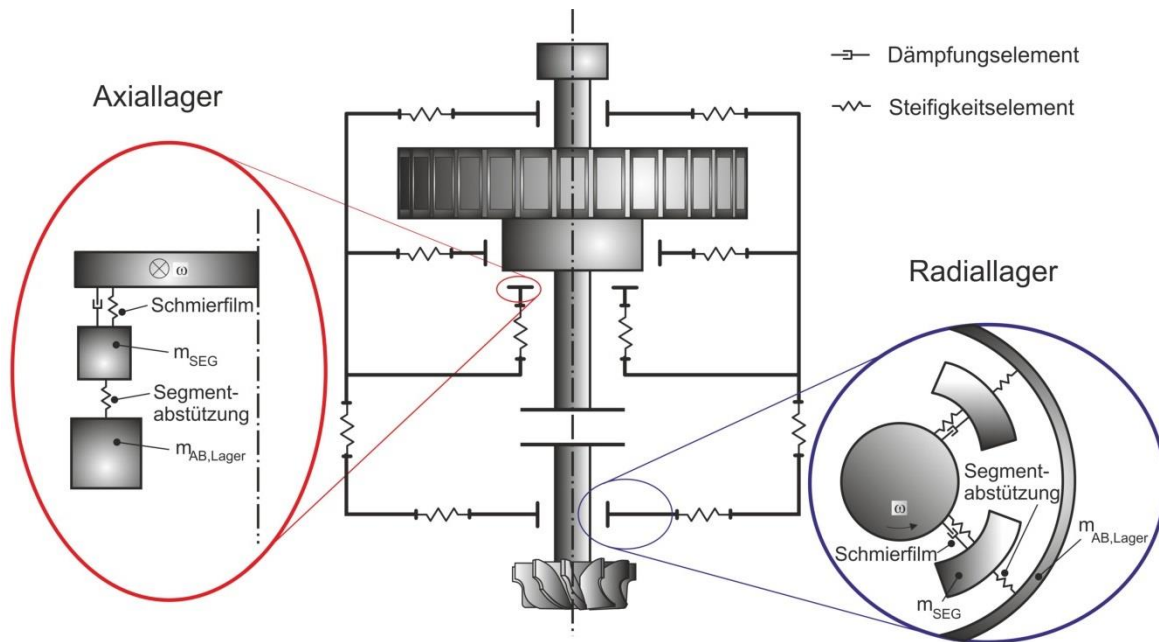


Abbildung 1.2: Mechanisches Ersatzbild eines Hydrogenerators

Volldynamische Berechnung und Erweiterung des nichtlinearen Näherungsverfahrens

Für die Berücksichtigung der nichtlinearen Lagercharakteristik wird das Zeitverhalten mit numerischen Zeitintegrationsverfahren simuliert, da die Lösung der nichtlinearen Differenzialgleichungen nur für Spezialfälle möglich ist. Die Schmierfilmkräfte werden durch die direkte Lösung der Reynolds'schen Differenzialgleichung in jedem Zeitschritt ermittelt, wodurch in einfacher Weise viele Zusatzeffekte wie Verkantungseinflüsse oder der zeitlich veränderliche Spaltfüllungsgrad Berücksichtigung finden können. Letzterer ermöglicht eine Berücksichtigung der temporären Ölmengenverteilung im Lager und somit eine genaue Berechnung des Schmierfilmdruckaufbaus. Ferner ist das Modell in der Lage, sowohl die Segmentträgheit, als auch die elastische Segmentabstützung zu berücksichtigen und bildet somit die Segmente als eigene, schwingungsfähige Systeme ab. Dies erfordert jedoch neben der Integration der Zustandsgrößen des Läufers auch die der Segmente. Sämtliche Zustandsgrößen müssen mit einem Zeitintegrationsverfahren simultan integriert werden. Diese Art der Berechnung stellt den höchsten Grad an Modelltiefe auf Seite der Gleitlagerung dar. An dieser Berechnungsmethode kann die Leistungsfähigkeit der vereinfachten Berechnungsansätze gemessen werden und es können auch extreme Parameterbereiche erfasst werden, in denen Vereinfachungen nicht mehr zulässig sind. Da dieses Vorgehen trotz optimierter Algorithmen sehr rechenzeitintensiv ist, soll es in erster Linie

für Vergleichszwecke dienen, um die Grenzen der vereinfachten Verfahren aufzuzeigen. Weiterhin soll das Verfahren zur Verifikation einer Erweiterung des Näherungsverfahrens nach [17] genutzt werden, mit dem Ziel die Berücksichtigung einer Verkantung durch eine erweiterte Störungsrechnung zu ermöglichen.

Praktische Berechnung linearer Eingangsgrößen als Näherungsmodell für das Verhalten von Vertikalmaschinen

Aufgrund der nichtlinearen Charakteristik der Lagerrückstellkraft bestehen immer Unsicherheiten bei der Anwendung der linearen Theorie. Um mehr Sicherheit zu erlangen werden Parameterstudien durchgeführt, die das Verhältnis von dynamischer zu statischer Last betreffen. Ein weiterer wichtiger Untersuchungsparameter ist das Verhältnis zwischen Schmierfilmsteifigkeit und Segment- bzw. Lagerabstützungssteifigkeit. Während sich der Ölfilm mit steigender Lagerzapfenexzentrizität zunehmend versteift, bleibt die Elastizität der Abstützung weitestgehend unverändert, wobei die Segmentabstützungssteifigkeit, je nach konstruktiver Gestaltung, eine nicht zu vernachlässigende Lastabhängigkeit aufweisen kann, die gegebenenfalls zu berücksichtigen ist. Die Möglichkeit und die Grenzen der Approximation der Ergebnisse mit Hilfe einer linearen Rotordynamikanalyse werden mit dem Ziel untersucht, eine Berechnungsvorschrift auf Basis der linearen Rotordynamik zu entwickeln und ihre Anwendungsgrenzen zu identifizieren.

Gültigkeitsprüfung der linearen Theorie durch Erweiterung der Störungsrechnung

Die dynamischen Rückstellkräfte von Gleitlagern werden in der linearen Gleitlagertheorie mit Hilfe der je vier Steifigkeits- und Dämpfungskoeffizienten approximiert. Diese werden aus der numerischen Lösung der Reynolds'schen Differenzialgleichung abgeleitet, indem die Schmierspalthöhe um die statische Ruhelage gestört wird. Durch Einsetzen des Ansatzes in die Reynolds'sche Differenzialgleichung erhält man unter Ausnutzung des Superpositionsprinzips die vier Störungsgleichungen. Um den Gültigkeitsbereich der linearen Theorie bestimmen zu können, soll die Störungsrechnung um Terme höherer Ordnung erweitert werden, wodurch weitere Störungsgleichungen und somit Koeffizienten höherer Ordnung entstehen. Hierbei sollen sämtliche wichtigen Zusatzeffekte wie die dreidimensional veränderliche Viskosität oder Schmierfilmturbulenz beachtet werden. Die Koeffizienten höherer Ordnung beinhalten Informationen über die Änderung der Steifigkeits- und Dämpfungskoeffizienten und können unmittelbar zur Ermittlung des Linearisierungsfehlers bei vorgegebe-

ner Kraft-Weg-Charakteristik genutzt werden. Für die numerische Lösung ist ein geeigneter Algorithmus zu entwickeln, der sämtliche impliziten Abhängigkeiten zwischen den Lösungsvariablen der Störungsgleichungen und den Randbedingungen für ihre Berechnung beachtet.

Gezielte Fehlausrichtung der Lagerstellen

Bei statisch überbestimmten Systemen ist es möglich, den Lagern durch gezielte Ausrichtung der Lagerstellen bzgl. der Rotordrehachse eine statische Grundlast aufzuprägen. Ein überbestimmtes System liegt vor, wenn ein Rotor mehr als zwei Lagerstellen aufweist. Da bei vertikalen Maschinen i.d.R. mindestens zwei Radiallager und ein Axiallager verbaut sind, können immer Verspannungseffekte entstehen. Im Rahmen der hier durchgeführten Arbeiten wird dem System durch systematische Ausrichtung der Lagerstellen eine statische Grundlast aufgeprägt und der Einfluss auf das Schwingungsverhalten untersucht. Hierzu werden typische Bauarten vertikaler Maschinen herangezogen.

Anwendung der Gesamtberechnungsverfahren auf typische Maschinenkonstruktionen

Abschließend soll, ergänzend zu den vorher durchgeführten Verifikations- und Variationsarbeiten, das Systemverhalten typischer Maschinen mit den entwickelten Berechnungsverfahren analysiert werden.

2. Theoretische Modellbeschreibung

2.1 Methoden zur Lösung des dynamischen Rotor-Lager-Verhaltens

2.1.1 Lineare Analyse

Folgende Schwingungsdifferenzialgleichung beschreibt das Bewegungsverhalten eines biegeelastischen Rotors in Inertialsystem-Koordinaten:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + (\mathbf{G}(\omega) + \mathbf{D}(\omega, \mathbf{x}_{stat}))\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}(\omega, \mathbf{x}_{stat})\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (2.1)$$

Hierin besitzen die Systemmatrizen und Vektoren folgende Bedeutung:

- \mathbf{M} Massenmatrix
- \mathbf{G} Gyroskopische Matrix
- \mathbf{D} Dämpfungsmatrix der geschwindigkeitsproportionalen Dämpfungen
- \mathbf{K} Steifigkeitsmatrix
- \mathbf{F} Vektor der äußeren Kräfte und Unwuchtkräfte
- \mathbf{x} Verschiebungsvektor relativ zum statischen Betriebspunkt
- \mathbf{x}_{stat} Verschiebungsvektor des statischen Betriebspunktes
- ω Winkelgeschwindigkeit der Welle

Die Steifigkeiten und Dämpfungen der Gleitlager sind von der Lagerlast und der Winkelgeschwindigkeit der Welle abhängig. Im statischen Fall reduziert sich Gleichung (2.1) zu $\mathbf{K}(\omega, \mathbf{x}_{stat})\mathbf{x}_{stat} = \mathbf{F}_{stat}$, wodurch sich die Verschiebungen in den Lagerstellen aufgrund äußerer Lasten ermitteln lassen. Durch die Nichtlinearität der Gleitlager muss der statische Betriebspunkt \mathbf{x}_{stat} iterativ ermittelt werden. Im Sonderfall eines statisch bestimmten Systems, welches z. B. bei einem zweifach gelagerten Rotor mit vernachlässigbaren Verkantungsmomenten vorliegt, folgen die Lagerkräfte direkt aus dem statischen Kräftegleichgewicht. Nach Ermittlung des aktuellen Betriebspunktes werden die dynamischen Lagereigenschaften linearisiert. Aus Abschnitt 2.3.8 kann die theoretische Bestimmung der dynamischen Koeffizienten (Steifigkeiten und Dämpfungen) auf Basis einer Störungsrechnung entnommen werden.

Zur Berechnung des Schwingungsverhaltens aufgrund von Unwuchten wird die inhomogene Lösung von Gleichung (2.1) ermittelt. Hierbei wird davon ausgegangen, dass der homogene Anteil der Lösung aufgrund von Dämpfungseffekten stets abgeklungen ist. Die Eigenfrequenzen und Dämpfungen werden mittels Eigenwertanalyse des homogenen Gleichungssystems bestimmt.

2.1.2 Nichtlineare Analyse

Für die Berücksichtigung der nichtlinearen Lagercharakteristik werden die Lagerkräfte nicht durch Steifigkeiten und Dämpfungen in den Systemmatrizen, sondern als verschiebungs- und wegabhängige Lagerkräfte auf die rechte Seite des Gleichungssystems geschrieben:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + (\mathbf{G} + \mathbf{D})\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F}(t, \omega, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \quad (2.2)$$

Durch Einführen eines neuen Zustandsvektors \mathbf{q} und des entsprechenden Kraftvektors $\tilde{\mathbf{F}}$

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{x}} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

ergibt sich ein äquivalentes Differenzialgleichungssystem erster Ordnung in Zustandsraumdarstellung

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{A}\mathbf{q} + \mathbf{B}\tilde{\mathbf{F}}(t, \omega, \mathbf{q}), \quad (2.4)$$

für dessen Zeitintegration standardisierte Verfahren existieren. Vor der Integration erfolgt noch eine modale Reduktion des Systems, die z. B. in [56] beschrieben ist. Als Integrationsverfahren kommt der Integrator *ode23t* des Softwarepakets MATLAB zum Einsatz. Der Integrator basiert auf der impliziten Trapezregel gemäß

$$\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n + 0,5 \Delta t (\dot{\mathbf{q}}(t_n, \mathbf{q}_n) + \dot{\mathbf{q}}(t_{n+1}, \mathbf{q}_{n+1})). \quad (2.5)$$

Hierin ist \mathbf{q}_{n+1} der aktuell zu berechnende Zustandsvektor zur Zeit t_{n+1} und \mathbf{q}_n der Zustandsvektor des letzten Zeitschrittes t_n . Neben der Implementierung von Gleichung (2.5) besitzt der Integrator einen Fehlerschätzer mit adaptiver Zeitschrittsteuerung. Eine detaillierte Beschreibung des Verfahrens findet sich in [57].

Die prinzipielle Vorgehensweise zur Kopplung zwischen hydrodynamischer und rotordynamischer Berechnung zeigt Abbildung 2.1. Das Rotordynamikprogramm übergibt die Verlagerungen \mathbf{e} des letzten $n-1$ und des aktuellen Zeitschrittes n an die Hydrodynamikroutine. Im Falle der Anwendung eines Kavitationsalgorithmus wird zusätzlich die örtliche Ölmengenverteilung in Form des Spaltfüllungsgrades θ bereitgestellt. Der Gleitlagerbaustein übergibt infolge dieser Randbedingungen die Lagerrückstell-

kräfte \mathbf{F} und -momente als Eingangsgrößen der nachfolgenden Zeitintegration. Dabei ist sicherzustellen, dass der Gleitlageroutine ausschließlich Füllungsgradinformationen des letzten erfolgreichen Zeitschrittes übergeben werden [58].

- n - Zeitschrittzähler
k - Zähler zur Bestimmung des Füllungsgrades

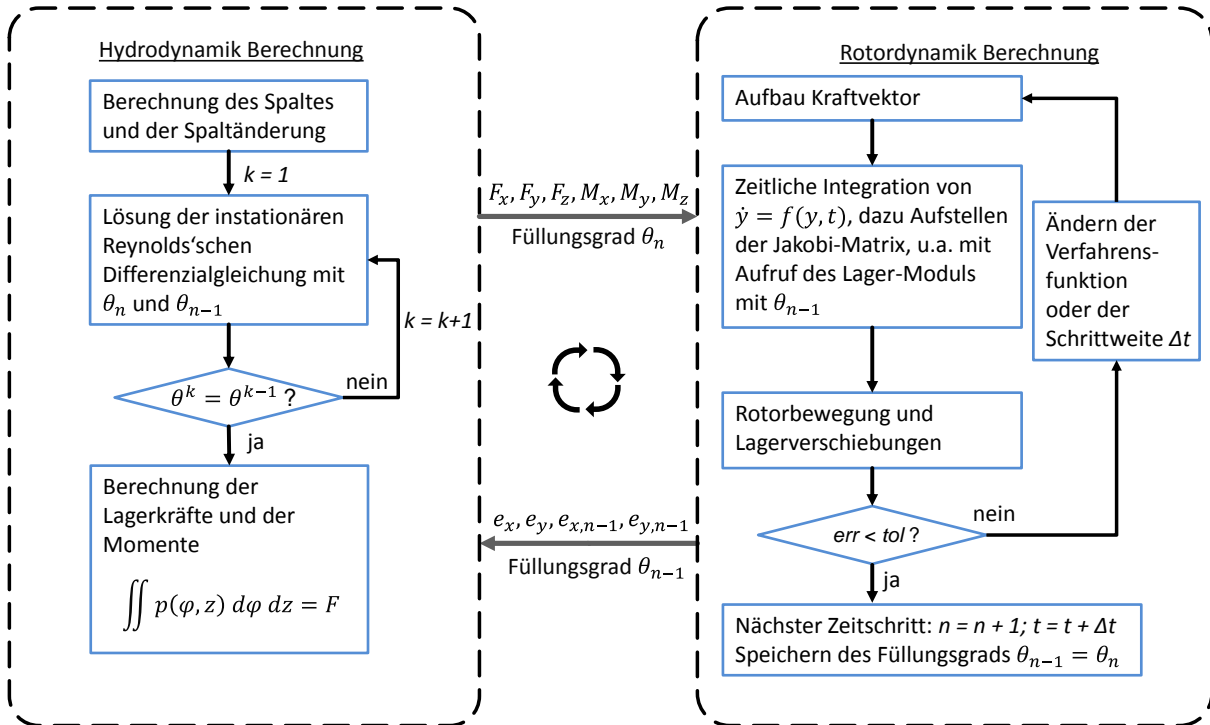


Abbildung 2.1: Kopplung zwischen rotordynamischer und hydrodynamischer Berechnung

Zur Erstellung eines Amplitudengangdiagrammes wird die Zeitintegration bei konstanter Drehzahl bis zum Erreichen eines quasistationären Zustandes fortgeführt. Anschließend erfolgt das Anfahren des nächsten Drehzahlpunktes mit einer ruckfreien Drehzahlsteigerung. Die ruckfreie Drehzahländerung zeichnet sich durch eine besonders arme Anregung der Systemeigenwerte aus, wodurch sich die Einschwingzeit erheblich verkürzen lässt.

Definition der Schwingweite einer beliebigen Bahnkurve

Im nichtlinearen System können die Bahnkurven von der Ellipsenform abweichen. Deshalb kommt für allgemeine Bahnkurven die Definition der Schwingwege nach Abbildung 2.2 zur Anwendung. Ausgehend vom zeitlich integrierten Mittelwert der Bahnkurve kann der Maximalwert des Wellenausschlages bestimmt werden. Der Maximalwert des Spitze-Spitze-Schwingweges wird nach [59] näherungsweise durch $S_{(p-p)max} = 2 S_{max}$ angegeben. Im Fall eines linearen Systemverhaltens, ist S_{max} identisch mit der großen Halbachse der ellipsenförmigen Verlagerungsbahn.

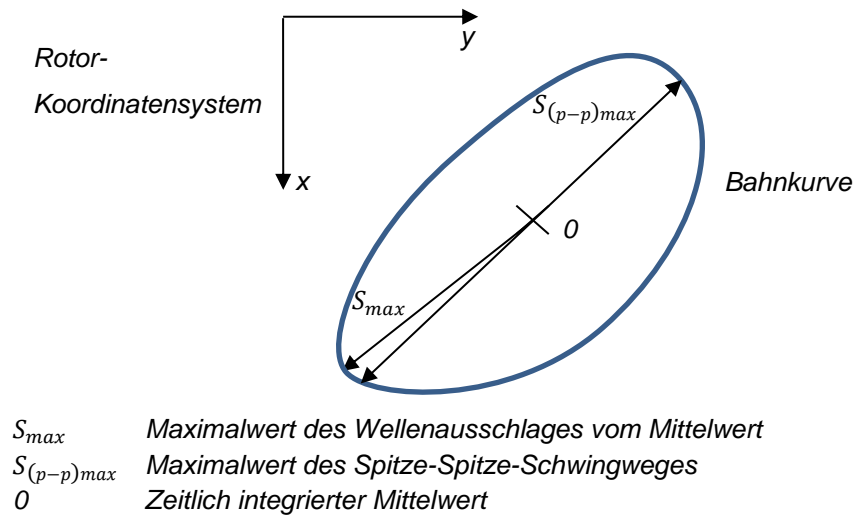


Abbildung 2.2: Definition der Schwingwege einer Bahnkurve nach [59]

2.2 Modellierung der elastischen Rotorwelle

Zur Modellierung der Wellenelastizität stellt die Balkentheorie einen optimalen Kompromiss aus Approximationsgüte, Implementierungsaufwand und Rechenzeit dar. Im Rahmen dieser Arbeit werden daher die Rotorwellen durch finite Elemente auf Basis der Timoshenko-Balkentheorie mit kubischen Ansatzfunktionen abgebildet. Die Knotenfreiheitsgrade eines Balkenelementes sind in Abbildung 2.3 dargestellt.

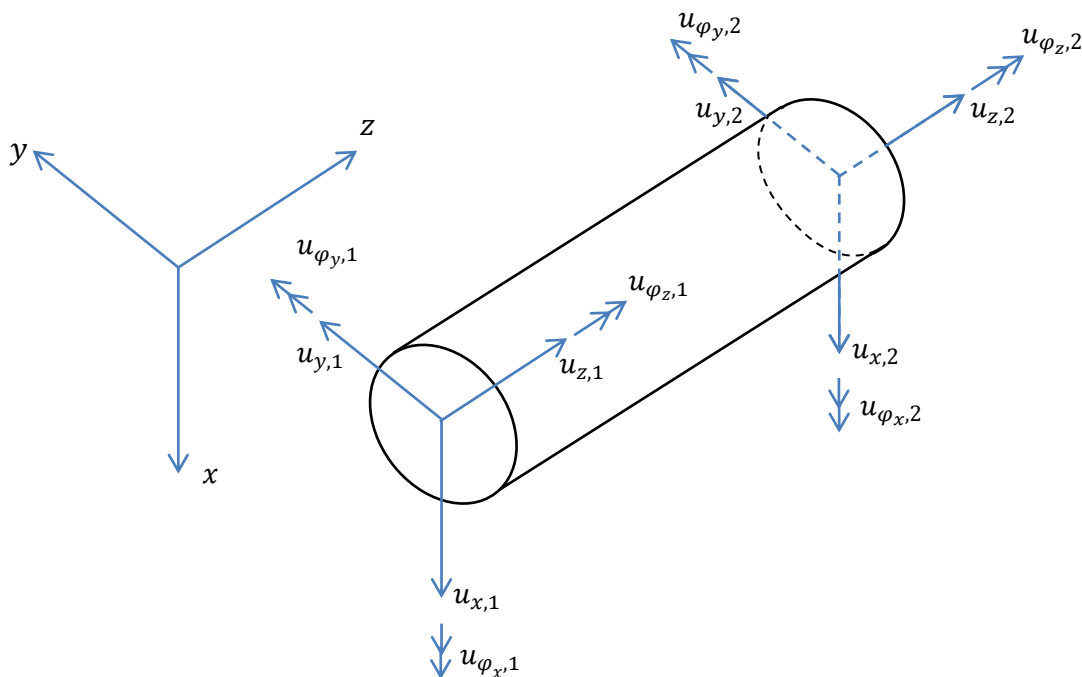


Abbildung 2.3: Koordinatensystem und Knotenverschiebungen eines Balkenelementes

Die Verschiebungen \mathbf{u} und Querschnittsverdrehungen $\boldsymbol{\varphi}$ im Inneren des Elementes werden durch die Knotenfreiheitsgrade \mathbf{u}_k mittels Ansatzfunktionen ausgedrückt. Die lateralen Verschiebungen \mathbf{u} setzen sich aus der Biegeverformung \mathbf{u}_β und der Schubverformung \mathbf{u}_σ zusammen. Mit den Ansatzfunktionen \mathbf{n} erfolgt die Bildung der lateralen Verschiebungen und mit den Ansatzfunktionen \mathbf{g} die der Querschnittsverdrehungen $\boldsymbol{\varphi}$:

$$\mathbf{u}(z) = \mathbf{n}(z) \mathbf{u}_k, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varphi}(z) = \mathbf{g}(z) \mathbf{u}_k, \quad \boldsymbol{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & 0 & n_2 & n_3 & 0 & 0 & n_4 \\ 0 & n_1 & -n_2 & 0 & 0 & n_3 & -n_4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 & -g_1 & g_2 & 0 & 0 & -g_3 & g_4 & 0 \\ g_1 & 0 & 0 & g_2 & g_3 & 0 & 0 & g_4 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

$$\mathbf{u}_k = (u_{x,1} \quad u_{y,1} \quad u_{\varphi_x,1} \quad u_{\varphi_y,1} \quad u_{x,2} \quad u_{y,2} \quad u_{\varphi_x,2} \quad u_{\varphi_y,2})^T$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_\beta + \mathbf{u}_\sigma$$

$$\varphi_x = -u'_{y,\beta} = -du_{y,\beta}/dz, \quad \varphi_y = u'_{x,\beta} = du_{x,\beta}/dz$$

Da beim schubweichen Balken, anders als beim Euler-Bernoulli Balken, die Querschnittsverdrehung nicht mit der Ableitung der lateralen Verschiebung entlang der Balkenlängsachse ($\varphi_y \neq u'_x$) ausgedrückt werden kann, existieren für die Querschnittsverdrehungen eigene Ansatzfunktionen. Die Ansatzfunktionen des Timoshenko-Balkens werden nicht beliebig gewählt, sondern aus den Differenzialgleichungen des Balkens abgeleitet. Dies geschieht z. B. durch das Aufbringen von Fesselungsrandbedingungen am linken und rechten Balkenende in Kombination mit aufgebrachten Einheitsverschiebungszuständen und anschließendem Auswerten der Biegelinie, z. B. [60]. Die so entstehenden Ansatzfunktionen beschreiben den statischen Verschiebungszustand aufgrund von Endkräften und -momenten exakt. Für die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen werden dieselben Ansatzfunktionen verwendet.

Die Elementmatrizen können mit Hilfe des Hamiltonschen Prinzips hergeleitet werden, indem das zeitliche Integral der Lagrangefunktion minimiert wird. Die Lagrangefunktion ergibt sich aus der Differenz der kinetischen (T) und potenziellen Energie (V) zuzüglich der Energie nichtkonservativer Kräfte (W). Nach Anwendung des Prinzips der virtuellen Arbeit können die Bewegungsgleichungen durch

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta(T - V) + \delta W) dt = 0 \quad (2.7)$$

ausgedrückt werden. Die kinetische Energie dT eines differenziellen Balkenabschnittes der Länge ds ergibt sich nach [61] mit der Masse pro Länge m_l , sowie den polaren I_p und äquatorialen Massenträgheitsmomenten I_a pro Länge zu

$$dT = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{u}_x \\ \dot{u}_y \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} m_l & \\ & m_l \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}_x \\ \dot{u}_y \end{pmatrix} ds + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \omega_z^* \\ \omega_x^* \\ \omega_y^* \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} I_p & & \\ & I_a & \\ & & I_a \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \omega_z^* \\ \omega_x^* \\ \omega_y^* \end{pmatrix} ds. \quad (2.8)$$

Hierin beschreiben $\omega_z^*, \omega_x^*, \omega_y^*$ Komponenten der Winkelgeschwindigkeiten eines Rechtssystems, wobei ω_z^* gleich der Rotationswinkelgeschwindigkeit ist und orthogonal auf der axialen Balkenquerschnittsfläche steht. Durch Transformation dieser Komponenten in das Inertialsystem und Integration über die Balkenlängsachse erhält man folgenden Ausdruck für die kinetische Energie [61], [62]

$$T = \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^l m_l \begin{pmatrix} \dot{u}_x \\ \dot{u}_y \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \dot{u}_x \\ \dot{u}_y \end{pmatrix} ds}_{\text{Radialverschiebung}} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^l I_a \begin{pmatrix} \dot{\phi}_x \\ \dot{\phi}_y \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \dot{\phi}_x \\ \dot{\phi}_y \end{pmatrix} ds}_{\text{Querschnittsverdrehung}} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^l I_p ds \dot{\phi}_z^2}_{\text{Torsion}} - \underbrace{\dot{\phi}_z \int_0^l I_p \phi_y \phi_x ds}_{\text{Gyroskopischer Anteil}}, \quad (2.9)$$

wobei alle Terme höherer Ordnung vernachlässigt werden. Die potenzielle Energie des Timoshenko-Balkens setzt sich aus der Biege- und Schubverformung, sowie der radialen Verformung aufgrund axialer Lasten zusammen [62]:

$$\begin{aligned}
V = & \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^l EI \begin{pmatrix} u_{x,\beta}'' \\ u_{y,\beta}'' \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} u_{x,\beta}'' \\ u_{y,\beta}'' \end{pmatrix} ds}_{\text{Biegeverformung}} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^l \kappa GA \begin{pmatrix} u_{x,\sigma}' \\ u_{y,\sigma}' \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} u_{x,\sigma}' \\ u_{y,\sigma}' \end{pmatrix} ds}_{\text{Schubverformung}} \\
& + \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^l f_z \begin{pmatrix} u_x' \\ u_y' \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} u_x' \\ u_y' \end{pmatrix} ds}_{\substack{\text{Radiale Verformung} \\ \text{aufgrund axialer Lasten } f_z \\ \text{(Vorspannung)}}}.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Hierin ist EI das Produkt aus Elastizitätsmodul und Flächenträgheitsmoment und κGA das Produkt aus Schubfaktor, Schubmodul und Querschnittsfläche. Bei kreisringförmigen Querschnitten ist der Schubfaktor eine Funktion der Querkontraktionszahl, sowie des Innen- und Außendurchmessers [63]. Die virtuelle Arbeit einer diskreten Unwucht beträgt:

$$\delta W = \underbrace{\int_0^l \begin{pmatrix} \delta u_x \\ \delta u_y \end{pmatrix}^T m \omega^2 \begin{pmatrix} e_m \cos(\omega t) \\ e_m \sin(\omega t) \end{pmatrix} ds}_{\text{Virtuelle Arbeit der Unwucht}}. \tag{2.11}$$

Das Auswerten der Integrale führt schließlich auf die Systemmatrizen eines einzelnen Balkenelementes. Diese können samt Ansatzfunktionen z. B. aus [62] entnommen werden.

2.3 Beschreibung des Radiallagermodells

2.3.1 Schmierspaltströmung und Druckverteilung

Die Schmierspaltströmung in einem Lagerspalt lässt sich mit ausreichender Genauigkeit durch die Reynolds'sche Differenzialgleichung beschreiben. Zur Formulierung der Gleichung wird das in Abbildung 2.4 dargestellte Koordinatensystem herangezogen. Die Reynolds'sche Differenzialgleichung ergibt sich durch geeignete systemspezifische Vereinfachungen aus den Navier-Stokes-Gleichungen unter Berücksichtigung der Massenstromkontinuität, z. B. [39]:

- Das Schmiermittel haftet an den Oberflächen
- Lagerschale und Zapfen sind starr und glatt
- Konstante dynamische Viskosität und Dichte des Schmierstoffs
- Konstanter Druck über der Spalthöhe

- Die Schmierpalhöhe ist klein gegenüber der Gleitflächenabmessungen
- Im Schmierpalt gilt aufgrund den geometrischen Abmessungen die Kleinwinkel-näherung $\cos(\alpha) \approx 1$ und $\sin(\alpha) \approx \tan(\alpha) \approx \partial h / \partial x$

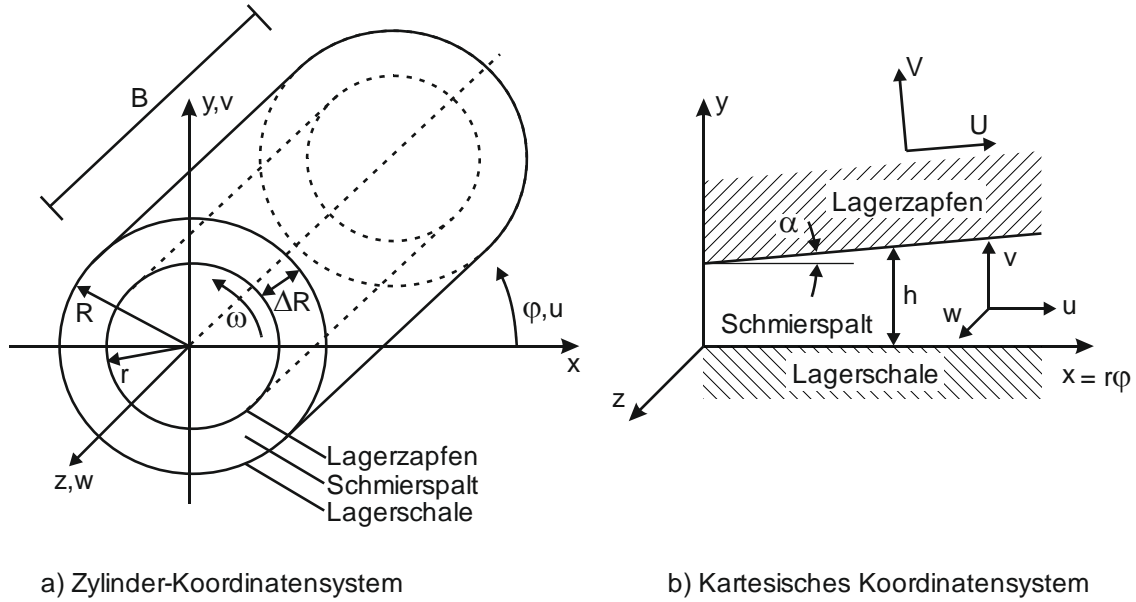


Abbildung 2.4: Koordinatensysteme des Radiallagermodells [12]

Mit diesen Annahmen erhält man die Reynolds'sche Differenzialgleichung für eine inkompressible, isoviskose und laminare Schmierpaltströmung, z. B. [12]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{U}{2} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2.12)$$

Die in Spalthöhenrichtung veränderliche Viskositätsverteilung kann durch die Integrale

$$F_0 = \int_0^h \frac{dy}{\eta}, \quad F_1 = \int_0^h \frac{y}{\eta} dy, \quad F_2 = \int_0^h \frac{y}{\eta} \left(y - \frac{F_1}{F_0} \right) dy, \quad (2.13)$$

in der zweidimensionalen Gleichung berücksichtigt werden [64]. Lokal auftretende Schmierfilmturbulenz führt zu zeitlich veränderlichen Schwankungen der Geschwindigkeit und des Druckes, deren Einfluss mit Hilfe einer Scheinviskosität nach *Boussinesq* [65] berücksichtigt werden kann. Das laminare Geschwindigkeitsprofil der Reynolds'schen Differenzialgleichung wird hierfür mit Turbulenzkorrekturfaktoren so angepasst, dass die über der Spalthöhe gemittelte Geschwindigkeit identisch mit der des turbulenten Profils ist. Für die Berücksichtigung der Scheinviskosität in der Rey-

nolds'schen Differenzialgleichung werden experimentell ermittelte Turbulenzkorrekturfaktoren K_x und K_z nach *Constantinescu* [66], [67] angewendet. Die Teilfüllung im Kavitationsgebiet wird mit der relativen Dichte ρ^* beschrieben. Die Kompressibilität des Schmierstoffes wird vernachlässigt, so dass die Dichteabhängigkeit der Poiseuillesterme entfällt. Mit der Einführung der dimensionslosen Größen

$$\Pi = \frac{p \Delta R^2}{\eta_0 \omega r^2}, \quad \varphi = \frac{\bar{x}}{r}, \quad \bar{y} = \frac{y}{\Delta R}, \quad \bar{z} = \frac{z}{r}, \quad H = \frac{h}{\Delta R}$$

$$\rho^* = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad \eta^* = \frac{\eta}{\eta_0}, \quad \tau = \omega t, \quad \eta_p^* = \frac{1}{12 F_2^*}, \quad f_c = 2 \left(1 - \frac{F_1^*}{F_0^*} \right) \quad (2.14)$$

$$F_0^* = \int_0^1 \frac{d\tilde{y}}{\eta^*}, \quad F_1^* = \int_0^1 \tilde{y} d\tilde{y}, \quad F_2^* = \int_0^1 \tilde{y} \left(\tilde{y} - \frac{F_1^*}{F_0^*} \right) d\tilde{y}, \quad \tilde{y} = \frac{\bar{y}}{H} = \frac{y}{h}$$

erhält man eine dimensionslose Formulierung der Reynolds'schen Differenzialgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{H^3}{12 \eta_p^* K_x} \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{H^3}{12 \eta_p^* K_z} \frac{\partial \Pi}{\partial \bar{z}} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\rho^* f_c H) + \frac{\partial}{\partial \tau} (\rho^* H) \quad (2.15)$$

Die numerische Lösung der Reynolds'schen Differenzialgleichung erfolgt mit Hilfe der Finite-Volumen-Methode. Hierfür wird Gleichung (2.15) zunächst mit einem Rechengitter partitioniert und anschließend über beide Raumrichtungen und der Zeit integriert. Die Integrale werden mit Hilfe des Rechengitters numerisch approximiert. Während der Lösung der Reynolds'schen Differenzialgleichung werden die JFO-Randbedingungen zwischen dem Überdruckgebiet und dem Kavitationsgebiet nach [68], [69] eingestellt. Die JFO-Randbedingungen besagen, dass im Kavitationsgebiet näherungsweise ein konstanter Druck vorliegt, so dass die Druckströmung im Kavitationsgebiet verschwindet und das Ölvolumen nur noch durch die welleninduzierte Schleppströmung transportiert wird. Die Einstellung der Randbedingungen erfolgt auf Basis einer Volumenstrombilanz und wird von Elrod [70], [71] in numerisch implementierbarer Form angegeben, wobei die Reynolds'sche Differenzialgleichung im gesamten Lösungsgebiet nach der relativen Dichte ρ^* gelöst wird. Beim modifizierten Ansatz nach *Mittwollen* [40] wird von einer Inkompressibilität des Schmierstoffes ausgegangen und stattdessen die druckähnliche Variable P eingeführt, die im Über-

druckgebiet dem Druck entspricht und im Kavitationsgebiet einen linearen Zusammenhang mit dem Füllungsgrad beschreibt:

$$P_{j,i} = \begin{cases} \Pi_{j,i} & \text{im Überdruckgebiet} \\ \theta_{j,i} - 1 & \text{im Kavitationsgebiet} \end{cases} \quad (2.16)$$

Hierbei wird die relative Dichte ρ^* durch den Füllungsgrad θ ausgedrückt. Im Überdruckgebiet ist der Füllungsgrad bekannt und beträgt $\theta = 1$, wodurch sich Gleichung (2.15) vereinfacht:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{H^3}{12\eta_p^* K_x} \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{H^3}{12\eta_p^* K_z} \frac{\partial \Pi}{\partial \bar{z}} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi} (f_c H) + \frac{\partial H}{\partial \tau}. \quad (2.17)$$

Im Kavitationsgebiet verschwindet die Druckströmung, wodurch Gleichung (2.15) mit $\theta = P + 1$ in die folgende Form übergeht:

$$0 = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi} ((1 + P)f_c H) + \frac{\partial}{\partial \tau} ((1 + P)H). \quad (2.18)$$

Mit Hilfe eines Kavitationsindex K können beide Gleichungen (2.17) und (2.18) in einer Gleichung kombiniert werden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{K H^3}{12\eta_p^* K_x} \frac{\partial P}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{K H^3}{12\eta_p^* K_z} \frac{\partial P}{\partial \bar{z}} \right) \\ = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi} ((1 - (1 - K)P)f_c H) + \frac{\partial}{\partial \tau} (1 - (1 - K)PH) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Der Kavitationsindex K beträgt im Überdruckgebiet $K = 1$ und im Kavitationsgebiet $K = 0$, wodurch Gleichung (2.19) wieder in Gleichung (2.17), bzw. (2.18) übergeht. Zur numerischen Stabilisierung kann es notwendig sein den Kavitationsindex zwischen zwei Iterationsschritten nicht binär zwischen den Werten 0 und 1 umzuschalten, sondern durch einen kontinuierlichen Verlauf zu ersetzen. Hierzu erfolgt nach [72] die Einführung des Parameters g_{factor} . Gleichung (2.20) beschreibt die Modifikation des Kavitationsindex in Abhängigkeit der druckähnlichen Variable P . Als Zusatzbedingung wird gefordert, dass der Kavitationsindex stets im Bereich zwischen 0 und 1 liegt.

$$K_{j,i}(P_{j,i} \geq 0) = K_{j,i}/g_{factor}$$

$$K_{j,i}(P_{j,i} < 0) = K_{j,i} \cdot g_{factor} \quad (2.20)$$

$$K_{j,i}(K_{j,i} > 1) = 1$$

$$K_{j,i}(K_{j,i} < 10^{-6}) = 0$$

Nach Berechnung der Druckverteilung im Lager für eine bekannte Zapfenposition und -geschwindigkeit ergibt sich die Lagerkraft durch Integration des Druckfeldes über die Zapfenoberfläche.

2.3.2 Segmentdynamik

Zur Berücksichtigung der Segmentdynamik wird jedes einzelne Segment als träge Masse abgebildet, wodurch zusammen mit den Schmierfilm- und Abstützungselastizitäten jeweils ein eigenes schwingungsfähiges System entsteht. Für die Beschreibung der Segmentbewegung ist es zweckmäßig, zwei Koordinatensysteme einzuführen. Die Beschreibung der translatorischen Segmentbewegung geschieht für jedes Segment in einem segmenteigenen ζ, η, θ – Inertialkoordinatensystem nach Abbildung 2.5. Der Ursprung des Segmentkoordinatensystems befindet sich im geometrischen Lagerzentrum und der axialen Lagermitte, so dass die ζ -Achse in Richtung des Abstützpunktes und die θ -Achse in Richtung der Wellenachse zeigt. Der Trägheitstensor zur Beschreibung der Segmentrotationen wird in einem $\zeta_k, \eta_k, \theta_k$ – Koordinatensystem formuliert, dessen Ursprung im Schwerpunkt liegt. Die Segmentrotationen werden durch die Orientierung des Segmentkoordinatensystems relativ zum Inertialkoordinatensystem ausgedrückt. Die Hauptkipprichtung verläuft demnach um die θ_k -Achse und die Hauptabsenkrichtung entlang der ζ -Achse. Für die spätere Beschreibung der Schmierpaltfunktion ist es außerdem zweckmäßig, ein um die θ -Achse gedrehtes Koordinatensystem einzuführen, dessen ζ' -Achse in Richtung des Segmentschwerpunktes zeigt. Für die geometrische Beschreibung wird vorausgesetzt, dass der Segmentlaufbahn-Krümmungsmittelpunkt, der Segmentrücken-Krümmungsmittelpunkt und der Abstützpunkt auf einer gemeinsamen Verbindungslinie mit dem geometrischen Lagerzentrum liegen. Da der Abstützpunkt nicht mit dem Schwerpunkt zusammenfällt, ist es zur Abbildung einer Kippbewegung um den Abstützpunkt zwingend erforderlich, dass der Schwerpunkt auch den transla-

torischen η -Freiheitsgrad besitzt. Im Folgenden wird zunächst von einer vollständigen Berücksichtigung aller translatorischen und rotatorischen Freiheitsgrade ausgegangen. Eine spätere Freiheitsgradreduktion ist unter Beachtung der kinematischen Bedingungen möglich.

- SLKM: Segmentlaufbahn-Krümmungsmittelpunkt
 SRKM: Segmentrücken-Krümmungsmittelpunkt
 SP: Segmentschwerpunkt
 ASP: Abstützungspunkt
 R_a : Lageraußenradius
 $r_{seg,i} = R_s$: Segmentinnenradius (=Segmentlaufbahnkrümmungsradius)
 $r_{seg,a}$: Segmentaußenradius
 e : Abstand der Krümmungsmittelpunkte von Segmentlaufbahn und -rücken
 l_ζ : Hebelarm vom SP zum ASP in ζ -Richtung
 l_η : Hebelarm vom SP zum ASP in η -Richtung
 τ' : Winkel zwischen SP und ASP

Das Segment Koordinatensystem befindet sich im geometrischen Lagerzentrum
 Die ζ -Achse zeigt in Richtung des ASP, die θ -Achse in Richtung der Wellenachse

SLKM, SRKM, ASP liegen mit dem geometrischen Lagerzentrum auf einer gemeinsamen Verbindungslinie

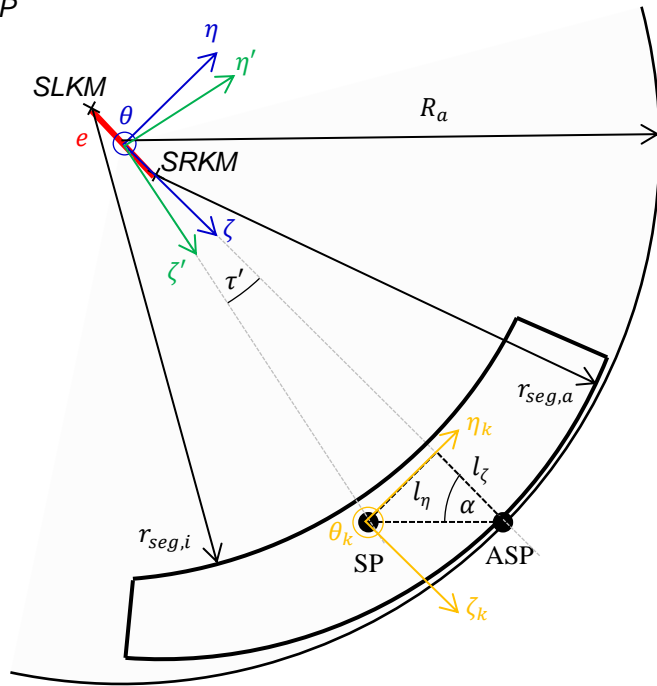


Abbildung 2.5: Geometrische Beschreibung eines Segmentes im Ausschnitt eines Gesamtlagers

Die Bewegungs-Differenzialgleichungssysteme (2.21) des Segmentes müssen unter Kenntnis der Schmierfilm- und Abstützungsmomente $M_{sf,k}$ und $M_{ab,k}$, bzw. der Schmierfilm- und Abstützungskräfte F_{sf} und F_{Ab} nach der Winkelbeschleunigung $\ddot{\phi}_{sp}$, bzw. nach der translatorischen Beschleunigung $\ddot{\zeta}$ gelöst werden. Die Beschleunigungen können anschließend mit einem Zeitintegrationsverfahren integriert werden.

$$J_{seg} \ddot{\phi}_k + \dot{\phi}_k \times (J_{seg} \dot{\phi}_k) = M_{sf,k} + M_{ab,k} \quad (2.21)$$

$$\mathbf{M}_{seg} \ddot{\boldsymbol{\zeta}} = \mathbf{F}_{sf} + \mathbf{F}_{Ab},$$

$$\boldsymbol{\varphi}_k = \begin{pmatrix} \varphi_\zeta \\ \varphi_\eta \\ \varphi_\theta \end{pmatrix}_{sp}, \quad \mathbf{J}_{seg} = \begin{bmatrix} J_{\zeta\zeta} & J_{\zeta\eta} & J_{\zeta\theta} \\ J_{\eta\zeta} & J_{\eta\eta} & J_{\eta\theta} \\ J_{\theta\zeta} & J_{\theta\eta} & J_{\theta\theta} \end{bmatrix}_k, \quad \boldsymbol{\zeta} = \begin{pmatrix} \zeta \\ \eta \\ \theta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_{seg} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}$$

Kippmomente aufgrund der Schmierfilmkräfte

Mit den lokalen Hebelarmen vom Schwerpunkt zur Segmentlauffläche

$$\mathbf{l} = \begin{pmatrix} l_\zeta \\ l_\eta \\ l_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_s \cos(\varphi - \varphi_{ASP}) - \zeta_{sp} \\ R_s \sin(\varphi - \varphi_{ASP}) - \eta_{sp} \\ \theta_{sp} - z \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

und den lokalen Schmierfilmkräften

$$\mathbf{F}_{sf} = \begin{pmatrix} F_\zeta \\ F_\eta \\ F_\theta \end{pmatrix} = |F| \begin{pmatrix} \cos(\varphi - \varphi_{ASP}) \\ \sin(\varphi - \varphi_{ASP}) \\ \approx 0 \end{pmatrix}, \quad (2.23)$$

ergeben sich die Schmierfilmmomente auf den Schwerpunkt zu

$$\mathbf{M}_{sf,sp} = \begin{pmatrix} M_\zeta \\ M_\eta \\ M_\theta \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{N_z} \sum_{j=1}^{N_x} \mathbf{l}_{i,j} \times \mathbf{F}_{sf,i,j}, \quad (2.24)$$

indem die lokalen Momente über der Lagerbreite und den Lagerumfang summiert werden. Hierin ist φ die Winkelkoordinate der Kontrollvolumenmittelpunkte des Rechengitters und φ_{ASP} die des Abstützpunktes. Die Koordinaten $\zeta_{sp}, \eta_{sp}, \theta_{sp}$ beschreiben die Lage des segmentfesten Koordinatensystems im ζ, η, θ – Koordinatensystem.

Kippmomente aufgrund der Abstützungskräfte

Die Bildung der Kippmomente aufgrund der Abstützungskräfte erfolgt mit dem Hebelarm vom Abstützpunkt zum Schwerpunkt

$$\mathbf{l}_{SP-ASP} = \begin{pmatrix} l_\zeta \\ l_\eta \\ l_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_a - \zeta_{sp} \\ -\eta_{sp} \\ -\theta_{sp} \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

und den Kontaktkräften \mathbf{F}_{ab} des Abstützpunktes:

$$\mathbf{M}_{ab,sp} = \begin{pmatrix} M_\zeta \\ M_\eta \\ M_\theta \end{pmatrix} = \mathbf{l}_{SP-ASP} \times \mathbf{F}_{ab} \quad (2.26)$$

Kinematische Beziehung zwischen Segmentbewegung und Translation am Abstützpunkt

Die Kontaktkraft im Abstützpunkt ist von den relativen Verschiebungen von Segment und Lagerring abhängig. Der relative Abstand von Segment und Lagerring am Abstützpunkt setzt sich im Allgemeinen durch die relative translatorische Lage $\Delta\zeta(\Delta\zeta_{sp}, \Delta\zeta_{lr})$ beider Körper und der Anteile der Segmentschwerpunktsrotationen $\Delta\zeta(\Delta\varphi_{\zeta,k,sp})$, $\Delta\zeta(\Delta\varphi_{\eta,k,sp})$ und $\Delta\zeta(\Delta\varphi_{\theta,k,sp})$ zusammen. Geht man von einer Drehung $\Delta\varphi_{\theta,k,sp}$ um die θ_k -Achse aus, so ergeben sich folgende translatorische Verschiebungen $\Delta\zeta$ im Abstützpunkt:

$$\Delta\zeta = \begin{pmatrix} \Delta\zeta \\ \Delta\eta \\ \Delta\theta \end{pmatrix} = \Delta\zeta(\Delta\zeta_{sp}, \Delta\zeta_{lr}) + \Delta\zeta(\Delta\varphi_{\theta,k,sp})$$

$$\Delta\zeta(\Delta\zeta_{sp}, \Delta\zeta_{lr}) = \begin{pmatrix} \Delta\zeta \\ \Delta\eta \\ \Delta\theta \end{pmatrix}_{sp} - \begin{pmatrix} \Delta\zeta \\ \Delta\eta \\ \Delta\theta \end{pmatrix}_{lr} \quad (2.27)$$

$$\Delta\zeta(\Delta\varphi_{\theta,k,sp}) = \sqrt{l_\zeta^2 + l_\eta^2} \begin{pmatrix} -\cos(\alpha)(1 - \cos(\Delta\varphi_{\theta,k,sp})) - \sin(\alpha)\sin(\Delta\varphi_{\theta,k,sp}) \\ -\sin(\alpha)(1 - \cos(\Delta\varphi_{\theta,k,sp})) + \cos(\alpha)\sin(\Delta\varphi_{\theta,k,sp}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \arctan(-l_\eta/l_\zeta)$$

Da die Bewegungen des Segmentes klein sind, können die Abstände l_ζ und l_η näherungsweise als konstant angesehen werden.

2.3.3 Geometrische Beschreibung des Lagerspalts

Abbildung 2.6 zeigt die Schmierspaltgeometrie mit den wichtigsten beschreibenden Größen am Beispiel eines profilierten 3-Flächen-Festsegmentlagers in zentrischer und exzentrischer Zapfenlage.

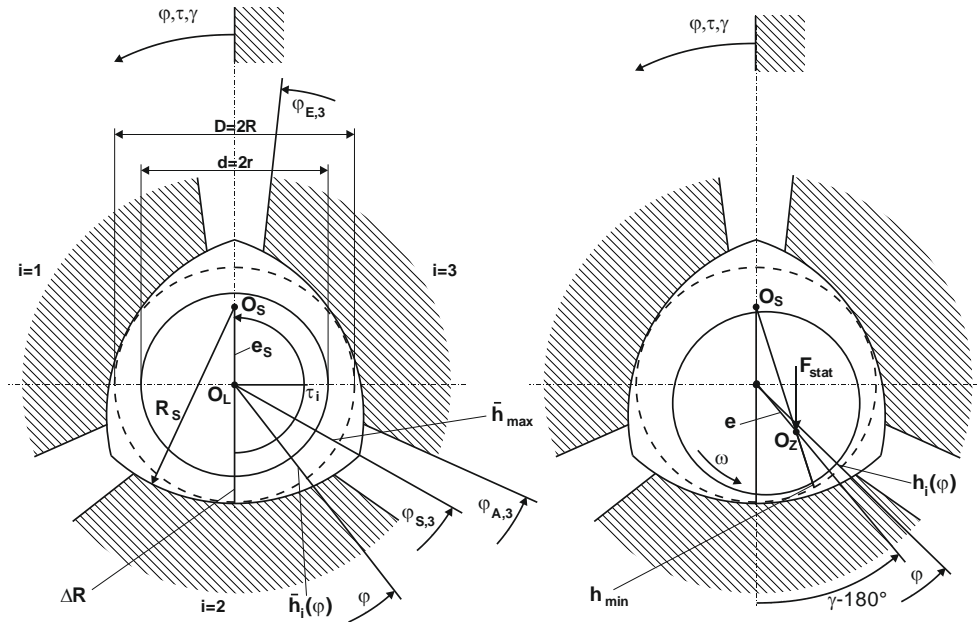


Abbildung 2.6: Spaltgeometrie eines 3-Flächen-Festsegmentlagers [12]

Bei zentrischer Zapfenlage ergibt sich auf einem bestimmten Segment die lokale Schmier-spalthöhe aufgrund des Lagerspiels $\Delta R = R - r$ und des Segmentspiels $\Delta R_s = R_s - r$:

$$h(\varphi, z) = \Delta R_s + (\Delta R_s - \Delta R) \cos(\varphi - \tau_{ASP}). \quad (2.28)$$

Die lokale Spalthöhe ändert sich aufgrund der Zapfenverlagerung e und γ nach

$$\Delta h(\varphi, z) = -e \Delta R \cos(\varphi - \gamma) \quad (2.29)$$

und aufgrund der Zapfenschiefstellung nach

$$\Delta h(\varphi, z) = +\varphi_{z,x} z \sin(\varphi) - \varphi_{z,y} z \cos(\varphi). \quad (2.30)$$

Bei Kippsegmentlagern kommt noch die Spaltänderung aufgrund der Segmentkippwinkel $\varphi_{k,\theta}$, $\varphi_{k,\eta}$, $\varphi_{k,\zeta}$ und der Segmentabsenkungen ζ , η hinzu:

$$\begin{aligned} \Delta h(\varphi, z) = & R_{sp} \varphi_{k,\theta} \sin(\varphi - \tau_{SP}) - z \varphi_{k,\eta} \cos(\varphi - \tau_{SP}) + z \varphi_{k,\zeta} \sin(\varphi - \tau_{SP}) \\ & - \zeta' \cos(\varphi - \tau_{SP}) + \eta' \sin(\varphi - \tau_{SP}) \end{aligned} \quad (2.31)$$

Hierin ist R_{sp} der Abstand des Segmentschwerpunktes vom Lagerzentrum. Die lokale Schmier-spalthöhe im Betrieb ergibt sich durch Superposition der Spalthöhe aus Gleichung (2.28) mit allen relevanten Spaltänderungen (2.29) bis (2.31). Der Zusam-

menhang mit der dimensionslosen Schmierspalthöhe ist durch das Lagerspiel ΔR gegeben:

$$H(\varphi, z) = \frac{h(\varphi, z)}{\Delta R} \quad (2.32)$$

2.3.4 Elastizität der Segmentabstützung

Zur Abschätzung der Segmentabstützungssteifigkeit am Kontakt von Segment und Lagerring existieren zahlreiche kontaktartsspezifische Beziehungen. Diese basieren auf der Hertz'schen Theorie [73], und besitzen somit als Annahme linear-elastisches Materialverhalten sowie das Vorhandensein eines elastischen Halbraumes. Die Abmessungen der Kontaktpartner müssen groß gegenüber dem Kontaktgebiet sein, um dem Verhalten eines elastischen Halbraumes nahe zu kommen. Die Zusammenhänge der Absenkung mit der Kontaktkraft sind in [74] speziell für den Segment-Lagerring Kontakt beschrieben. Eine Zusammenfassung der Kraft-Weg-Relationen der unterschiedlichen Kontaktarten findet sich unter anderem in [75] oder [78] und wird hier übernommen. Die Berücksichtigung unterschiedlicher Materialeigenschaften beider Kontaktpartner erfolgt durch harmonische Mittelwertbildung der Elastizitätsmoduln und der Querkontraktionszahlen, was zu einem gemeinsamen reduzierten Elastizitätsmodul E_{red} und einer reduzierten Querkontraktionszahl ν_{red} führt. Zum Einsatz der nichtlinearen Beziehungen in einer Zeitintegration müssen die Kontaktkräfte infolge der Abplattungen bestimmt werden. Im Folgenden werden die Gleichungen deshalb, sofern möglich, explizit nach der Kontaktkraft gelöst dargestellt:

Kontakt beliebig gewölbter Oberflächen

Die Kontaktkraft beliebig gewölbter Oberflächen ergibt sich nach [82] als Funktion der Abplattung ζ_{ab} zu

$$F = \left(\zeta_{ab} \frac{k_2^{1/3}}{k_1} \right)^{3/2} \quad (2.33)$$

mit den Abkürzungen

$$k_1 = 1,5 \psi \frac{1 - \nu_{red}^2}{E_{red}}, \quad k_2 = 3 \zeta^3 \frac{1 - \nu_{red}^2}{E_{red}} \frac{1}{(1/r + 1/r')} \quad (2.34)$$

Die Größen ψ und ζ sind Funktionen des Hilfswinkels ϑ :

$$\vartheta = \arccos\left(\frac{\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}}{\frac{1}{r'} + \frac{1}{r}}\right)$$

$$\frac{1}{r'} + \frac{1}{r} = \frac{1}{r'_1} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r'_2} + \frac{1}{r_2} \quad (2.35)$$

$$\frac{1}{r'} - \frac{1}{r} = \sqrt{\left(\frac{1}{r'_1} - \frac{1}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{r'_2} - \frac{1}{r_2}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{r'_1} - \frac{1}{r_1}\right)\left(\frac{1}{r'_2} - \frac{1}{r_2}\right)\cos(2\varphi)}$$

Hierin beschreiben r_1 und r_2 den jeweils größten Krümmungsradius beider Körper und r'_1 bzw. r'_2 die Krümmungsradien in der jeweiligen Orthogonalen. Die Ebenen der Krümmungsradien r_1 und r_2 spannen den Winkel φ auf. Die Größen ψ und ζ sind in Abhängigkeit des Hilfswinkels ϑ nach Tabelle 2.1 durch Interpolation zu bestimmen.

Tabelle 2.1: Hilfsgrößen zur Bestimmung der Segmentabstützungssteifigkeit [82, 83]

ϑ	90°	80°	70°	60°	50°	40°	30°	20°	10°	0°
ζ	1	1,128	1,284	1,486	1,754	2,136	2,731	3,778	6,612	∞
ψ	1	1,12	1,25	1,39	1,55	1,74	1,98	2,3	2,8	∞

Linienabstützung

Für den Linienkontakt sind zwei alternative Näherungsbeziehungen gebräuchlich. Gleichung (2.36) gibt eine von den Kontaktradien unabhängige Beziehung von Abplattung und Kontaktkraft wieder [84]:

$$F = \zeta_{ab} \frac{E_{red} l}{5,7} \quad (2.36)$$

Hierin ist l die Länge des Linienkontaktes. Die alternative, in [74] beschriebene Formel nach [85], lautet

$$\zeta_{ab} = \frac{2q}{\pi E^*} \left[1 - \ln\left(\frac{2qr_{red}}{\pi E^* l^2}\right) \right], \quad (2.37)$$

mit dem reduzierten Krümmungsradius des Kontaktes r_{red} , der Streckenlast q und dem reduzierten Werkstoffkennwert E^* :

$$r_{red} = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}, \quad q = \frac{F}{l}, \quad E^* = \frac{2E_1 E_2}{E_1(1 - \nu_2^2) + E_2(1 - \nu_1^2)} \quad (2.38)$$

Die Lösung von Gleichung (2.37) nach der Kraft erfolgt iterativ.

Kippsteg

Die Kontaktkraft an einem Kippsteg kann nach [74] durch:

$$F = \zeta_{ab} \frac{\pi E^* l}{2 \left[1 - \ln \left(\frac{a^2}{4l^2} \right) \right]}, \quad (2.39)$$

mit der halben Kippstegbreite a , approximiert werden.

Kugel gegen Platte

Die Kraft infolge der Absenkung ζ_{ab} lautet für den Kugel-gegen-Platte-Kontakt:

$$F = \sqrt{\zeta_{ab}^3 \frac{E_{red}^2 r}{2,25(1 - \nu_{red}^2)^2}} \quad (2.40)$$

2.3.5 Festkörpertragdruck

Unter bestimmten Betriebsbedingungen kann der Fall eintreten, dass kein hydrodynamischer Druckaufbau existiert. Hiervon sind insbesondere die unbelasteten Segmente eines Kippsegmentlagers betroffen. Um ein unphysikalisches Durchdringen der Körper zu vermeiden, wird ein einfaches Modell für den Festkörpertragdruck verwendet. Dieses soll in erster Linie zur Vermeidung eines Programmabbruchs und nicht zur exakten Berechnung von Mischreibungszuständen dienen. Bewegt sich der Zapfen beispielsweise auf einer Bahnkurve großer Amplitude, können die unbelasteten Segmente unter Umständen kurzzeitig an der Welle anstreifen. Der Festkörpertragdruck verhindert das Durchdringen von Zapfen und Segment, beeinflusst die Gesamtlagerkraft jedoch kaum. Zum Einsatz kommt das Modell nach [86], welches auf der Arbeit von *Greenwood* und *Tripp* [87] basiert. Das Modell geht von einer normalverteilten Höhe der Oberflächenrauheitsskuppen aus. Dabei wird einem Körper die gesamte, resultierende Rauheit aufgeprägt und der andere Körper als ideal glatt angesehen. Sobald die Spaltweite die einen Grenzwert unterschreitet, kommen die ersten Rauheitsspitzen in Kontakt, wodurch eine elastische Verformung und somit ein

Tragdruck stattfindet. Mit steigender Annäherung erhöht sich die Zahl der tragenden Rauheitsspitzen. Der Tragdruck steigt demnach, trotz linear-elastischem Materialverhaltens, progressiv mit der Annäherung an. Der Festkörpertragdruck ergibt sich aus dem reduzierten Elastizitätsmodul E^* , einer Funktion K der Oberflächenrauheit, sowie der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $F_{2,5}$ der Oberflächenrauheit:

$$p = E^* K F_{2,5} \quad (2.41)$$

Das Lösen der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion erfordert das Auswerten eines uneigentlichen Integrals. In [86] wird eine Ausgleichsfunktion für die Lösung des Integrals angegeben:

$$F_{2,5} = \begin{cases} 4,4068 \cdot 10^{-5} \left(4 - \frac{h}{h_\sigma}\right)^{6,804} & h/h_\sigma \leq 4 \\ 0 & h/h_\sigma > 4 \end{cases} \quad (2.42)$$

Hierin beschreibt h die lokale Spalthöhe und h_σ die Rauheit der kombinierten Summenoberfläche beider Kontaktpartner. Die Funktion K ergibt sich mit der Anzahl der Rauheitsspitzen N , deren durchschnittlichem Krümmungsradius β und der Standardabweichung σ der gemeinsamen, resultierenden Rauheit zu

$$K = \frac{8\sqrt{2}}{15} \pi (N \beta \sigma) \sqrt{\frac{\sigma}{\beta}}. \quad (2.43)$$

Der Wert von K wird beispielsweise für den Kontakt von Kolbenring und Zylinderlaufbahn in [86] als $K = 1,198 \cdot 10^{-5}$ angenommen. Der reduzierte Elastizitätsmodul beträgt

$$E^* = \frac{2}{\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2}}. \quad (2.44)$$

2.3.6 Thermisches Lagermodell

Der thermische Zustand des Lagers bestimmt das effektive Lagerspiel sowie die Ölfilmviskosität. Der thermische Lagerzustand wird mit dem Gleitlagerberechnungsprogramm COMBROS R [75] berechnet. Dieses bestimmt die quasistationäre, dreidi-

mensionale Temperaturverteilung des Schmierfilms, des Lagerrings und des Wellenzapfens unter Berücksichtigung der thermischen Mischung des im Lager befindlichen Öls mit dem Frischölvolumenstrom. Hierbei ergibt sich die Energiegleichung im Schmierspalt durch das Gleichgewicht von Konvektion, Wärmeleitung und Dissipation zu:

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{c\rho \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right)}_{\text{spezifische Änderung der inneren Energie}} \\
 &= \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right)}_{\text{spezifische durch Leitung ausgetauschte Wärme}} + \underbrace{\Phi}_{\text{spezifische zugeführte Reibungsarbeit}}
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

Hierin beschreibt die Funktion Φ die Dissipation infolge innerer Reibungsarbeit des Fluids. In den Festkörpern Lagerring und Wellenzapfen gelten die stationären Wärmeleitungsgleichungen. Für den Lagerring lautet die Wärmeleitungsgleichung

$$\lambda_s \left(\frac{1}{r_z} \frac{\partial}{\partial r_z} \left(r_z \frac{\partial T_s}{\partial r_z} \right) + \frac{1}{r_z^2} \frac{\partial^2 T_s}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T_s}{\partial z^2} \right) = 0, \tag{2.46}$$

und für den Wellenzapfen

$$\lambda_w \left(\frac{1}{r_z} \frac{\partial}{\partial r_z} \left(r_z \frac{\partial T_w}{\partial r_z} \right) + \frac{\partial^2 T_w}{\partial z^2} \right) = 0. \tag{2.47}$$

Die Wärmeleitungsgleichung der Welle ist auf eine in Umfangsrichtung konstante Temperaturverteilung vereinfacht. Aufgrund der Wellenrotation stellt sich bei rein stationär belasteten Lagern eine Vergleichmäßigung der Temperatur in Umfangsrichtung ein. Für die instationären Tragkraftberechnungen wird die Annahme zugrunde gelegt, dass der thermische Lagerzustand maßgeblich durch die Wellenrotation bestimmt wird, wodurch die zeitliche Auflösung der Energie- und Wärmeleitungsgleichungen entfällt. Eine detaillierte Beschreibung des thermischen Lagermodells kann z. B. [12] entnommen werden.

Die Verlustleistung ist stark von der Drehzahl aber nur schwach von der mechanischen Lagerbelastung abhängig, was dazu führt, dass auch die mittlere Seitenfluss-

temperatur nur schwach von der Lagerbelastung abhängt. Die Maximaltemperatur des Schmierfilms ist jedoch durchaus von der Lagerbelastung abhängig, da die Scherung des Öls im Bereich des engsten Spaltes einen starken Einfluss auf die lokale Dissipation besitzt. Gegenüber den mechanischen Schwingungen ändern die Bauteile ihre Temperaturen nur langsam. Bei konstanter Drehzahl kann daher während einer Periode der mechanischen Schwingung die thermische Lagerspieländerung als konstant angesehen werden. In [90] wird der Einfluss der instationären Temperaturverteilung in Schmierfilm, Lager und Spurscheibe eines Axiallagers untersucht und nur ein sehr geringer Einfluss auf die dynamische Tragkraft nachgewiesen. Hierbei erfolgte ein Vergleich der thermisch und hydrodynamisch volldynamischen Rechnung mit einer vereinfachten Tragkraftberechnung unter der Annahme einer zeitlich konstanten Viskositätsverteilung des quasistationären Gleichgewichtszustandes.

Allerdings würde sich bei einer ausschließlich durch Unwucht belasteten Welle eines Radiallagers keine vollständige Vergleichmäßigung der Temperaturverteilung in Umfangsrichtung aufgrund der Wellenrotation einstellen. Während eines Umlaufes des Lagerzapfens auf seiner Bahnkurve ist immer dieselbe Seite der Zapfenoberfläche dem engsten Spalt zugewandt. Dies kann zu einem einseitigen Aufheizen des Zapfens führen. In besonderen Konstellationen kann dies zu Schwingungserscheinungen aufgrund des thermisch induzierten Wellenschlags durch ungleichmäßige thermische Dehnung führen (Morton-Effekt) [91]. Dieser Effekt wird hier jedoch nicht weiter behandelt.

Da die Drehzahl maßgeblich den thermischen Zustand im Lager bestimmt, werden für die Berechnung der dynamischen Lagerkräfte stets die effektiven Lagerparameter eines korrespondierenden, quasistationären Betriebspunktes angenommen. Dieser Betriebspunkt besitzt dieselbe Drehzahl und weist die gleiche mittlere Lagerkraft auf. Durch diese Vorgehensweise kann der thermische Zustand unabhängig von der dynamischen Lagerkraftberechnung bestimmt werden.

2.3.7 Dynamische Schmierstoffmengenbilanz im hydrostatischen Taschenbereich

Aufgrund einer gedrosselten Zuführung kann der effektive Druck in den hydrostatischen Taschen vom Zuführdruck abweichen. Der Taschendruck wird auf Basis einer dynamischen Volumenstrombilanz bestimmt. Hierfür erfolgt eine Erweiterung des in

Das in der Tasche befindliche Ölvolumen ergibt sich in diesem Fall aus der zeitlichen Integration der zu- und abfließenden Taschenvolumenströme:

$$V_{\dot{O}l,T} = \int_{t=0}^T (\dot{Q}_{T,i} + \dot{Q}_{E,i-1} - \dot{Q}_{A,i} - \dot{Q}_{Ts,i,1} - \dot{Q}_{Ts,i,2}) dt \quad (2.51)$$

Mit dem bekannten Taschenvolumen $V_{ges,T}$ folgt schließlich für den Taschenfüllungsgrad

$$\theta_T(t) = \frac{V_{\dot{O}l,T}(t)}{V_{ges,T}(t)}, \quad (2.52)$$

wobei sich das Taschenvolumen selbst aufgrund der Wellenverlagerung ändern kann. Der Taschenfüllungsgrad wird als Randbedingung zur Lösung der Reynolds'schen Differenzialgleichung vorgegeben. Der Durchflussbeiwert der Blende beträgt

$$K_B = \left[\sqrt{\frac{\rho}{2}} \left(\frac{1}{\alpha A_i} - \frac{1}{A_0} \right) \right]^{-1} \quad (2.53)$$

mit der Kontraktionsziffer [93]

$$\alpha = 0,63 + 0,37 \left(\frac{A_i}{A_0} \right)^3. \quad (2.54)$$

Hierin ist A_i die Querschnittsfläche der Blende und A_0 der Querschnitt vor der Blende.

2.3.8 Beschreibung der dynamischen Lagerkräfte auf Basis einer Störungsrechnung

Die dynamischen Rückstellkräfte von Gleitlagern werden in der linearen Gleitlagertheorie mit Hilfe der je vier Steifigkeits- und Dämpfungskoeffizienten approximiert. Diese werden aus der numerischen Lösung der Reynolds'schen Differenzialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{H^3}{12\eta_p^* K_x} \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{H^3}{12\eta_p^* K_z} \frac{\partial \Pi}{\partial \bar{z}} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\rho^* f_c H) + \frac{\partial}{\partial \tau} (\rho^* H) \quad (2.55)$$

abgeleitet, indem die Schmierspalthöhe um die statische Ruhelage gestört wird:

$$\Pi(\varphi, \bar{z}) = \Pi_{stat} + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial X} \right)_{stat} \bar{X} + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial Y} \right)_{stat} \bar{Y} + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial X'} \right)_{stat} \dot{\bar{X}} + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial Y'} \right)_{stat} \dot{\bar{Y}} \quad (2.56)$$

$$H(\varphi, \bar{z}) = H_{stat} - \bar{X} \sin(\varphi) - \bar{Y} \cos(\varphi)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \tau}(\varphi, \bar{z}) = \dot{H}(\varphi, \bar{z}) = -\dot{\bar{X}} \sin(\varphi) - \dot{\bar{Y}} \cos(\varphi).$$

Hierzu zeigt Abbildung 2.8 die Größen der Störungsrechnung an einem Betriebspunkt.

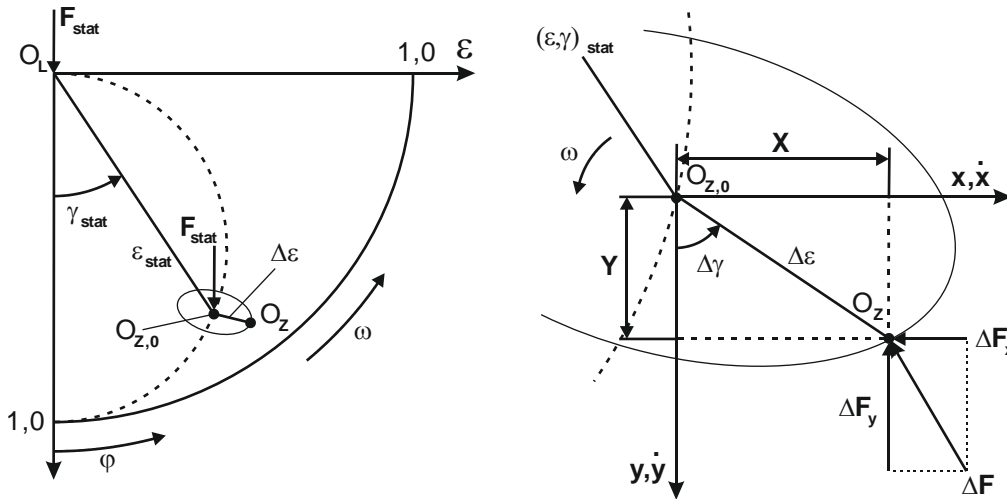


Abbildung 2.8: Dimensionsbehaftete Größen der linearen Störungsrechnung [12]

Durch Einsetzen des Ansatzes (2.56) in die Reynolds'sche Differenzialgleichung (2.55) erhält man unter Ausnutzung des Superpositionsprinzips vier Störungsgleichungen, was einer Taylorentwicklung ersten Grades gleichkommt.

Um den Gültigkeitsbereich der linearen Theorie bestimmen zu können, wird die Störungsrechnung um Terme höherer Ordnung erweitert, wodurch weitere Störungsgleichungen und somit Koeffizienten höherer Ordnung entstehen. Die Koeffizienten höherer Ordnung beinhalten Informationen über die Änderung der Steifigkeits- und Dämpfungskoeffizienten und können somit zur Ermittlung des Linearisierungsfehlers bei vorgegebener Kraft-Weg-Charakteristik genutzt werden. Die Koeffizienten höherer Ordnung werden aus der Reynolds'schen Differenzialgleichung bestimmt, indem

die Taylorentwicklung des Druckes nicht nach dem ersten Glied abgebrochen, sondern weitergeführt wird. Ausgeschrieben lautet die mehrdimensionale Taylorreihe beispielsweise bis zum dritten Grad:

$$\begin{aligned}
 Tf(x, a) = f(a) &+ \sum_{j=1}^d \frac{\partial f(a)}{\partial x_j} (x_j - a_j) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_j \partial x_k} (x_j - a_j)(x_k - a_k) \\
 &+ \frac{1}{6} \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \frac{\partial^3 f(a)}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l} (x_j - a_j)(x_k - a_k)(x_l - a_l)
 \end{aligned} \tag{2.57}$$

$$d = 4, \quad x_1 = \bar{X}, \quad x_2 = \bar{Y}, \quad x_3 = \dot{\bar{X}}, \quad x_4 = \dot{\bar{Y}}$$

Hierin beschreibt die Funktion f die Reynolds'sche Differenzialgleichung und a die Entwicklungsstelle, die der physikalischen Zapfenposition bzw. Zapfengeschwindigkeit des statischen Betriebspunktes entspricht. Im Rahmen dieser Arbeit wird der vollständige Satz Störungsgleichungen bis zum Grad 3 hergeleitet und angewendet. Alle Terme höherer Ordnung in den Störungsparametern $(\bar{X}, \bar{Y}, \dot{\bar{X}}, \dot{\bar{Y}})$ werden vernachlässigt. Die Störungsgleichungen besitzen immer eine ähnliche Struktur und teilweise sogar identische Terme. Deshalb sind zweckmäßigerweise sämtliche Gleichungen in einer Gleichung (2.60) zusammen gefasst. Hierin beschreiben L das jeweilige Lösungsfeld und R_0 bis R_{12} die Koeffizienten in den Termen der rechten Seite. Die Koeffizienten der rechten Seite können für jedes Lösungsfeld L aus Tabelle 2.2 bis Tabelle 2.4 entnommen werden. Koeffizienten, die durch Differentiation nach zwei Raumrichtungen entstehen, werden gekoppelte Koeffizienten genannt. Solche, die durch Differentiation nach einer oder mehreren Raumrichtungen und der Geschwindigkeit entstehen, werden hybride Koeffizienten genannt. Nach Gleichung (2.57) existieren zwar weitere Glieder, jedoch sind die entsprechenden rechten Seiten Null, sodass auch die Lösungsvariablen verschwinden. Diese Glieder entstehen durch mehrmalige Differentiation nach der Zapfenverlagerungsgeschwindigkeit. Bei allen Gliedern, die mehr als einmal nach der Zapfenverlagerungsgeschwindigkeit abgeleitet werden, verschwinden die rechten Seiten. Somit leisten diese Glieder keinen Beitrag zur Lagerkraft und werden nicht explizit aufgeführt. Wie aus Gleichung (2.60) ersichtlich, sind zur Lösung der Störungsgleichungen stets die Lösungen niedrigeren Grades erforderlich. Aus jedem Lösungsfeld L_i ergeben sich schließlich jeweils zwei

Koeffizienten $k_{x,i}^*$ und $k_{y,i}^*$ für die Beschreibung der Kraftänderung in x- bzw. y-Richtung durch Integration über die Lagergleitfläche:

$$\begin{pmatrix} k_{x,i}^* \\ k_{y,i}^* \end{pmatrix} = \frac{1}{4 B/D} \int_0^{2\pi} \int_0^{2B/D} \begin{pmatrix} \sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix} L_i d\bar{z} d\varphi \quad (2.58)$$

Das erweiterte, dimensionsbehaftete Kraftgesetz bis zum Grad 3 erhält schließlich folgende Form:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{sf} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} &= \mathbf{k} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \mathbf{d} \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \mathbf{k}^{(2)} \begin{pmatrix} X^2 \\ Y^2 \end{pmatrix} + \mathbf{k}_g^{(2)} (XY, X\dot{X}, X\dot{Y}, Y\dot{X}, Y\dot{Y})^T \\ &+ \frac{1}{6} \mathbf{k}^{(3)} \begin{pmatrix} X^3 \\ Y^3 \end{pmatrix} + \frac{3}{6} \mathbf{k}_g^{(3)} (XXY, XYY, XX\dot{X}, XX\dot{Y}, 2XY\dot{X}, 2XY\dot{Y}, YY\dot{X}, YY\dot{Y})^T \end{aligned} \quad (2.59)$$

Bei Anwendung der Taylorentwicklung auf die Reynolds'sche Differenzialgleichung treten einige Terme mehrfach auf, was in den Vorfaktoren von Gleichung (2.59) berücksichtigt wird.

Im Abschnitt 5.4 wird weiter auf die Anwendung der erweiterten Störungsrechnung eingegangen.

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{H_{stat}^3}{12\eta_p^* K_x} \frac{\partial}{\partial \varphi} L \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{H_{stat}^3}{12\eta_p^* K_z} \frac{\partial}{\partial z} L \right) \\
&= R_0 + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{R_1}{\eta_p^* K_x} \frac{\partial}{\partial \varphi} \Pi_{stat} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{R_2}{\eta_p^* K_x} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial p}{\partial \bar{X}} \right)_{stat} \right) \\
&+ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{R_3}{\eta_p^* K_x} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \bar{Y}} \right)_{stat} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{R_4}{\eta_p^* K_x} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \bar{X} \partial \bar{Y}} \right)_{stat} \right) \\
&+ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{R_5}{\eta_p^* K_x} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \bar{X}^2} \right)_{stat} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{R_6}{\eta_p^* K_x} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \bar{Y}^2} \right)_{stat} \right) \\
&+ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{R_7}{\eta_p^* K_x} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{\bar{X}}} \right)_{stat} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{R_8}{\eta_p^* K_x} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{\bar{Y}}} \right)_{stat} \right) \\
&+ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{R_9}{\eta_p^* K_x} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \bar{X} \partial \dot{\bar{X}}} \right)_{stat} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{R_{10}}{\eta_p^* K_x} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \bar{X} \partial \dot{\bar{Y}}} \right)_{stat} \right) \\
&+ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{R_{11}}{\eta_p^* K_x} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \bar{Y} \partial \dot{\bar{X}}} \right)_{stat} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{R_{12}}{\eta_p^* K_x} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \bar{Y} \partial \dot{\bar{Y}}} \right)_{stat} \right) \\
&+ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{R_1}{\eta_p^* K_x} \frac{\partial}{\partial z} \Pi_{stat} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{R_2}{\eta_p^* K_x} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \bar{X}} \right)_{stat} \right) \\
&+ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{R_3}{\eta_p^* K_x} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \bar{Y}} \right)_{stat} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{R_4}{\eta_p^* K_x} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \bar{X} \partial \bar{Y}} \right)_{stat} \right) \\
&+ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{R_5}{\eta_p^* K_x} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \bar{X}^2} \right)_{stat} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{R_6}{\eta_p^* K_x} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \bar{Y}^2} \right)_{stat} \right) \\
&+ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{R_7}{\eta_p^* K_x} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{\bar{X}}} \right)_{stat} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{R_8}{\eta_p^* K_x} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{\bar{Y}}} \right)_{stat} \right) \\
&+ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{R_9}{\eta_p^* K_x} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \bar{X} \partial \dot{\bar{X}}} \right)_{stat} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{R_{10}}{\eta_p^* K_x} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \bar{X} \partial \dot{\bar{Y}}} \right)_{stat} \right) \\
&+ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{R_{11}}{\eta_p^* K_x} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \bar{Y} \partial \dot{\bar{X}}} \right)_{stat} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{R_{12}}{\eta_p^* K_x} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \bar{Y} \partial \dot{\bar{Y}}} \right)_{stat} \right)
\end{aligned} \tag{2.60}$$

Tabelle 2.2: Terme zur Bildung der Störungsgleichungen erster Ordnung nach Gleichung (2.60)

<i>Lineare Terme</i>				
L	$\frac{\delta \Pi}{\delta \bar{X}}$	$\frac{\delta \Pi}{\delta \bar{Y}}$	$\frac{\delta \Pi}{\delta \dot{\bar{X}}}$	$\frac{\delta \Pi}{\delta \dot{\bar{Y}}}$
R_0	$-0,5 \cdot \frac{\delta}{\delta \varphi} (\rho^* f_c \sin(\varphi))$	$-0,5 \cdot \frac{\delta}{\delta \varphi} (\rho^* f_c \cos(\varphi))$	$-\rho^* \sin(\varphi)$	$-\rho^* \cos(\varphi)$
R_1	$3/12 \cdot H_{stat}^2 \cdot \sin(\varphi)$	$3/12 \cdot H_{stat}^2 \cdot \cos(\varphi)$	0	0
R_2 ... R_{12}	0	0	0	0

Tabelle 2.3: Terme zur Bildung der Störungsgleichungen zweiter Ordnung nach Gleichung (2.60), vgl. [94]

Quadratische und linear gemischte Terme				
L	$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \bar{X}^2}$	$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \bar{Y}^2}$	$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \bar{X} \partial \bar{Y}}$	
R_0	0	0	0	
R_1	$-0,5 \cdot H_{stat} \cdot \sin^2(\varphi)$	$-0,5 \cdot H_{stat} \cdot \cos^2(\varphi)$	$-0,5 \cdot H_{stat} \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\varphi)$	
R_2	$0,5 \cdot H_{stat}^2 \cdot \sin(\varphi)$	$0,5 \cdot H_{stat}^2 \cdot \cos(\varphi)$	$0,25 \cdot H_{stat}^2 \cdot \cos(\varphi)$	
R_3	0	0	$0,25 \cdot H_{stat}^2 \cdot \sin(\varphi)$	
R_4 ... R_{12}	0	0	0	
Hybride Terme				
L	$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \bar{X} \partial \dot{\bar{X}}}$	$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \bar{X} \partial \dot{\bar{Y}}}$	$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \bar{Y} \partial \dot{\bar{X}}}$	$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \bar{Y} \partial \dot{\bar{Y}}}$
R_0 ... R_6	0	0	0	0
R_7	$0,25 \cdot H_{stat}^2 \cdot \sin(\varphi)$	0	$0,25 \cdot H_{stat}^2 \cdot \cos(\varphi)$	
R_8	0	$0,25 \cdot H_{stat}^2 \cdot \sin(\varphi)$	0	$0,25 \cdot H_{stat}^2 \cdot \cos(\varphi)$
R_4 ... R_{12}	0	0	0	0

Tabelle 2.4: Terme zur Bildung der Störungsgleichungen dritter Ordnung nach Gleichung (2.60)

<i>Kubische und quadratisch-linear gemischte Terme</i>						
L	$\frac{\partial^3 \Pi}{\partial \bar{X}^3}$	$\frac{\partial^3 \Pi}{\partial \bar{Y}^3}$	$\frac{\partial^3 \Pi}{\partial \bar{X}^2 \partial \bar{Y}}$	$\frac{\partial^3 \Pi}{\partial \bar{Y}^2 \partial \bar{X}}$		
R_0	0	0	0	0		
R_1	$6 \cdot \sin^3(\varphi)$	$6 \cdot \cos^3(\varphi)$	$6 \cos(\varphi) \cdot \sin^2(\varphi)$	$6 \cos^2(\varphi) \cdot \sin(\varphi)$		
R_2	$-18H_{stat} \cdot \sin^2(\varphi)$	0	$-12H_{stat} \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\varphi)$	$-6H_{stat} \cdot \cos^2(\varphi)$		
R_3	0	$-18H_{stat} \cdot \cos^2(\varphi)$	$-6H_{stat} \cdot \sin^2(\varphi)$	$-12H_{stat} \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\varphi)$		
R_4	0	0	$6H_{stat}^2 \cdot \sin(\varphi)$	$6H_{stat}^2 \cdot \cos(\varphi)$		
R_5	$9H_{stat}^2 \cdot \sin(\varphi)$	0	$3H_{stat}^2 \cdot \cos(\varphi)$	0		
R_6	0	$9H_{stat}^2 \cdot \cos(\varphi)$	0	$3H_{stat}^2 \cdot \sin(\varphi)$		
R_7 ... R_{12}	0	0	0	0		
<i>Hybride Terme</i>						
L	$\frac{\partial^3 \Pi}{\partial \bar{X}^2 \partial \bar{X} \dot{\bar{X}}}$	$\frac{\partial^3 \Pi}{\partial \bar{X}^2 \partial \bar{Y} \dot{\bar{Y}}}$	$\frac{\partial^3 \Pi}{\partial \bar{X} \partial \bar{Y} \partial \bar{X} \dot{\bar{X}}}$	$\frac{\partial^3 \Pi}{\partial \bar{X} \partial \bar{Y} \partial \bar{Y} \dot{\bar{Y}}}$	$\frac{\partial^3 \Pi}{\partial \bar{Y}^2 \partial \bar{X} \dot{\bar{X}}}$	$\frac{\partial^3 \Pi}{\partial \bar{Y}^2 \partial \bar{Y} \dot{\bar{Y}}}$
R_0 ... R_6	0	0	0	0	0	0
R_7	$-6H_{stat} \cdot \sin^2(\varphi)$	0	$-6H_{stat} \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\varphi)$	0	$-6H_{stat} \cdot \cos^2(\varphi)$	0
R_8	0	$-6H_{stat} \cdot \sin^2(\varphi)$	0	$-6H_{stat} \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\varphi)$	0	$-6H_{stat} \cdot \cos^2(\varphi)$
R_9	$6H_{stat}^2 \cdot \sin(\varphi)$	0	$3H_{stat}^2 \cdot \cos(\varphi)$	0	0	0
R_{10}	0	$6H_{stat}^2 \cdot \sin(\varphi)$	0	$3H_{stat}^2 \cdot \cos(\varphi)$	0	0
R_{11}	0	0	$3H_{stat}^2 \cdot \sin(\varphi)$	0	$6H_{stat}^2 \cdot \cos(\varphi)$	0
R_{12}	0	0	0	$3H_{stat}^2 \cdot \sin(\varphi)$	0	$6H_{stat}^2 \cdot \cos(\varphi)$

2.3.9 Linearisierte dynamische Lagereigenschaften

Die linearisierten Lagereigenschaften erhält man, indem die Taylorreihe (2.57) nach den Gliedern ersten Grades abgebrochen wird. Die Lagerkraft (2.59) reduziert sich somit auf das folgende KC-Modell¹:

$$\mathbf{F}_{sf} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = \mathbf{k} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \mathbf{d} \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix} \quad (2.61)$$

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix} \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_{xx} & d_{xy} \\ d_{yx} & d_{yy} \end{bmatrix}$$

Um die dynamischen Lagerrückstellkräfte beim Kippsegmentlager in einer linearen Analyse ohne explizite Mitführung der Segmentfreiheitsgrade beschreiben zu können, wird eine resultierende Gesamtsteifigkeit und –dämpfung von Schmierfilm und Abstützung gebildet. Hierbei wird von einem masselosen Segment und einer harmonischen Schwingbewegung von Segment und Lagerzapfen ausgegangen. Somit können die Schmierfilm- und Abstützungskräfte gleichgesetzt werden. Mit der Lagerabstützungssteifigkeit und –dämpfung

$$\mathbf{F}_{Ab} = \mathbf{k}_{Ab} \begin{pmatrix} X_{ab} \\ Y_{ab} \end{pmatrix} + \mathbf{d}_{Ab} \begin{pmatrix} \dot{X}_{ab} \\ \dot{Y}_{ab} \end{pmatrix} \quad (2.62)$$

führt das Kräftegleichgewicht auf die resultierenden Koeffizienten des Einzelsegmentes in Zeigerschreibweise:

$$\mathbf{k}_{res} + j\omega \mathbf{d}_{res} = [(\mathbf{k}_{Ab} + j\omega \mathbf{d}_{Ab})^{-1} + (\mathbf{k} + j\omega \mathbf{d})^{-1}]^{-1} \quad (2.63)$$

Zur Lösung von Gleichung (2.63) muss die Frequenz der Schwingung bekannt sein. Die resultierenden Koeffizienten besitzen demnach eine explizite Abhängigkeit von der Schwingungsfrequenz. Durch Einsetzen der Drehfrequenz der Welle als Schwin-

¹ Im englischen Sprachgebrauch besitzt die Dämpfungsmatrix üblicherweise das Symbol **c**, anstatt des Symbols **d**. In deutschsprachiger Literatur hat sich deshalb die Bezeichnung des Feder-Dämpfer-Modells als KC-Modell ebenfalls etabliert.

gungsfrequenz erhält man die synchronen Koeffizienten. Die Gesamtlagerkoeffizienten ergeben sich durch Addition aller Einzelsegmentkoeffizienten. Der Einfluss der Schwingungsfrequenz auf die resultierende Lagerkraft kann mit einem KCM-Modell approximiert werden [76, 77, 81]:

$$\mathbf{F}_{res} = \mathbf{k}_{res} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \mathbf{d}_{res} \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix} + \mathbf{m}_{res} \begin{pmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \end{pmatrix} \quad (2.64)$$

Hierin beschreibt \mathbf{m}_{res} eine virtuelle Massenmatrix, der jedoch keine physikalische Bedeutung zuzuweisen ist. Die Bestimmung der Massenmatrix erfolgt durch eine Ausgleichsrechnung zur Approximation des Frequenzganges von Gleichung (2.63). Das KCM-Modell kann somit wie das KC-Modell in einer linearen Analyse ohne explizite Mitführung der Segmentfreiheitsgrade eingesetzt werden.

Im Rahmen dieser Arbeit liegt der Fokus auf den drehzahlsynchronen Unwuchtschwingungen und die Beschreibung der linearisierten Lagerkräfte erfolgt daher stets nach dem KC-Modell.

2.3.10 Erweiterte Lagermodellierung: Druckanstieg am Segmentbeginn und mechanische Segmentaufbiegung

Das dynamische Kippsegmentlagerverhalten kann von weiteren Effekten, wie dem dynamischen Druckanstieg am Segmentbeginn und der mechanischen Segmentverformung beeinflusst werden. Da keine geeigneten Messdaten zur Validierung des dynamischen Verhaltes der erweiterten Modellierung vorliegen, erfolgen nicht alle Berechnungen unter deren Berücksichtigung. Stattdessen wird der Einfluss stets gesondert untersucht. Sofern nicht anders gekennzeichnet, werden diese Effekte nicht in die Berechnung einbezogen. Ferner können diese Effekte zurzeit noch nicht in der linearen und nichtlinearen Störungsrechnung berücksichtigt werden, was einen Vergleich der unterschiedlichen Berechnungsmethoden erschwert.

Modell für den Druckanstieg am Segmentbeginn

Am Übergang der Segmentlückenströmung in die Segmentströmung kann bei hohen Umfangsgeschwindigkeiten ein signifikanter Druckanstieg entstehen, wie der gemessene Schmierfilmdruck in einem 5-Kippsegmentlager in Abbildung 2.9 zeigt. Der Druckanstieg am Segmentbeginn ist an zwei Segmenten durch rote Pfeile gekennzeichnet. Der Segmentanfangsdruck besitzt einen unmittelbaren Einfluss auf die

Segmentstellung und nimmt somit Einfluss auf die gesamte Schmierpaltströmung auf dem Segment. Der Druckanstieg kann sowohl experimentell als auch durch CFD-Simulationen [78], [89] nachgewiesen werden.

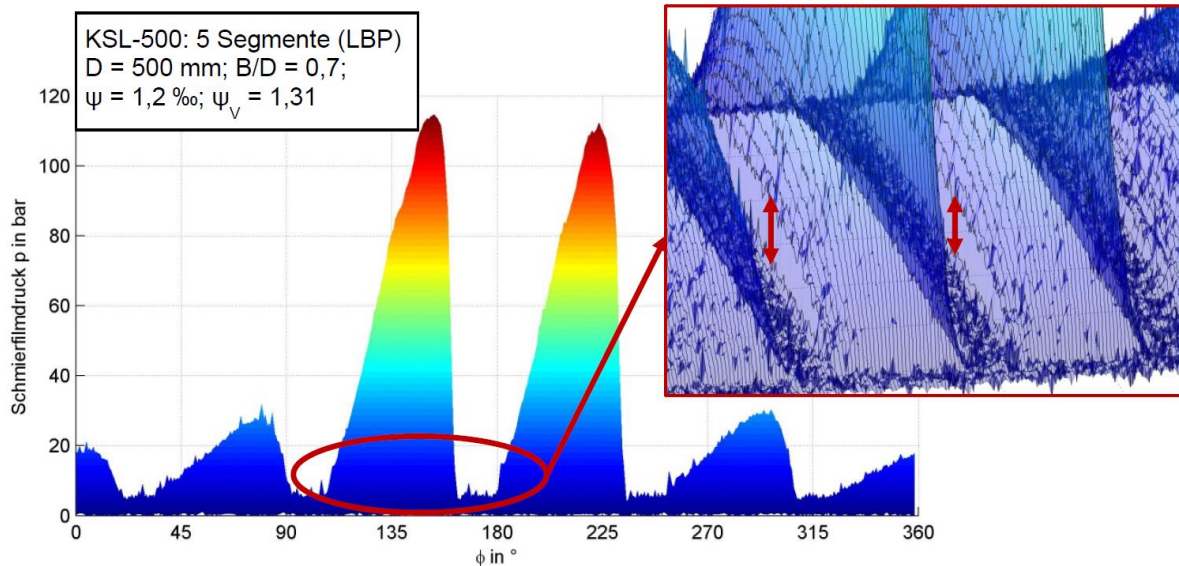


Abbildung 2.9: Gemessener Schmierfilmdruck eines 5-Kippsegmentlagers bei einer Drehzahl von $n = 3000 \text{ 1/min}$ [88], [78]

In [78] und [89] wird ein vereinfachtes, physikalisches Modell zur Beschreibung des Druckaufbaus angegeben und für den stationären Betrieb validiert. Das Modell geht von einer Grenzschichtströmung [79] im Segmentlückenbereich aus, deren Geschwindigkeitsprofil in Abbildung 2.10 dargestellt ist.

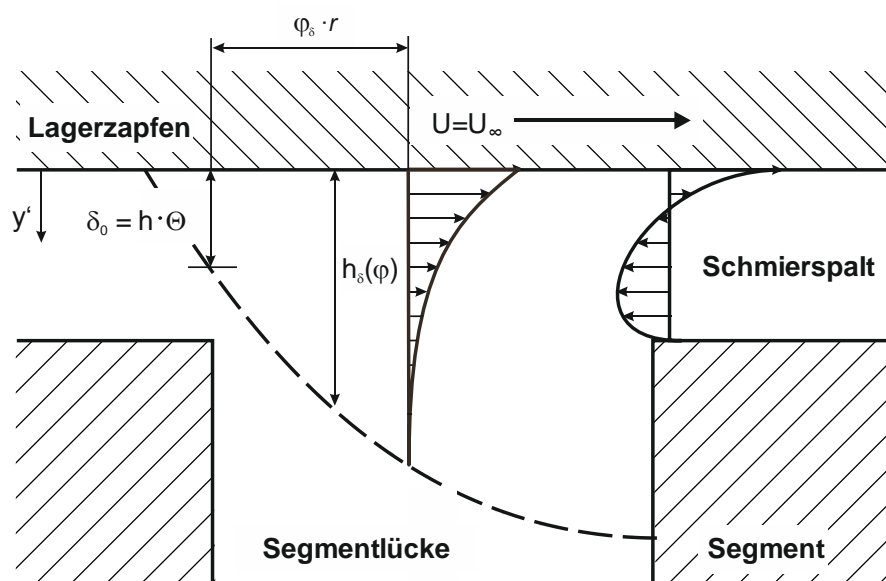


Abbildung 2.10: Geschwindigkeitsprofil im Taschenbereich und am Segmentbeginn, vgl. [89]

Die in [79] angegebenen Gleichungen zur Beschreibung der Grenzschichtströmung basieren auf der Lösung der Prandtlschen Grenzschichtgleichungen [80]. Am Übergang der Grenzschichtströmung in die Schmierspaltströmung des Segmentanfangs erfolgt eine Verzögerung der Strömungsgeschwindigkeit und es folgt somit nach *Bernoulli* ein entsprechender Druckaufbau. Mit den Randbedingungen

$$u(y' = 0) = U, \quad u(y' = \delta) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y'}(y' = \delta) = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y'^2}(y' = \delta) = 0, \quad (2.65)$$

kann die Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht nach einem Polynom dritten Grades angenähert werden:

$$u(\varphi, z, y') = U(1 - 3y' + 3y'^2 - y'^3) \quad (2.66)$$

Die mittlere Anströmgeschwindigkeit \bar{u} des Segmentes ergibt sich somit aus dem integralen Mittelwert der Grenzschichtgeschwindigkeit am Taschenende über die Segmenteintrittsspalthöhe h .

$$\bar{u}(\varphi, z, y') = \frac{1}{h} \int_0^h u(\varphi, z, y') dy' \quad (2.67)$$

Diese Anströmgeschwindigkeit wird am Segmenteintritt auf die mittlere Segmentanfangsfließgeschwindigkeit abgebremst, wodurch sich für den Druckanstieg am Segmentbeginn

$$\Delta p = \frac{\rho}{2} (\bar{u}^2 - \bar{u}_{seg}^2) \quad (2.68)$$

ergibt. Die dimensionslose, laminare Taschengrenzschichtdicke kann in Abhängigkeit der Lauflänge φ_δ und der Austrittsspalthöhe des vorangegangenen Segmentes bestimmt werden:

$$H_\delta = 5 \sqrt{\frac{\eta_m^*}{Re_0} \frac{\varphi_\delta}{\psi} + \left(\frac{H F}{5}\right)^2} \quad (2.69)$$

Bei großen Umfangsgeschwindigkeiten ändert sich die laminare Strömungsform der Grenzschicht zu einer turbulenten. Der Umschlag zur turbulenten Taschengrenzschichtstömung kann mit dem Transitionskriterium

$$\frac{Re_0}{\eta_m^*} H_\delta \geq 1511 \quad (2.70)$$

erfasst werden, wobei die globale Reynoldszahl als

$$Re_0 = \frac{\rho \omega r \Delta R}{\eta_0} \quad (2.71)$$

definiert ist. Die turbulente Taschengrenzschichtdicke ergibt sich für die Lauflänge ab dem Transitionspunkt und der Grenzschichtdicke H_{0t} am Transitionspunkt zu

$$H_{\delta t} = 0,37 \left[\frac{\varphi_t}{\psi} + \left(\frac{H_{0t}}{0,37} \left(\frac{Re_0}{\eta_m^*} \right)^{1/5} \right)^{5/4} \right]^{4/5} \left(\frac{Re_0}{\eta_m^*} \right)^{-1/5}. \quad (2.72)$$

Der Druckanstieg am Segmentbeginn beeinflusst die Strömung auf dem Segment, die wiederum eine Rückwirkung auf den Druckanstieg besitzt. Deshalb ist eine iterative Ermittlung des Strömungszustandes erforderlich, so dass die Segmentströmungsgeschwindigkeit mit dem Druckanstieg am Segmentbeginn konsistent ist.

Für die dynamische Analyse eines Kippsegmentlagers kann es nötig sein, den Druckaufbau am Segmentanfang zu berücksichtigen. Wie im Abschnitt 2.3.5 angesprochen, existieren Betriebsbedingungen, in denen kein hydrodynamischer Druck auf dem Segment aufgebaut werden kann. Mit dem Druckaufbau am Segmentanfang können die Kräfteverhältnisse an solch einem statisch instabilen Segment wieder eindeutig auf Basis physikalischer Vorgänge beschrieben werden.

Modell für die mechanische Segmentverformung

Die mechanische Segmentverformung in Umfangsrichtung lässt sich näherungsweise durch eine Biegeverformung beschreiben, die mit einer Änderung der effektiven Segmentkrümmung ausgedrückt werden kann [74]:

$$\Delta\psi_{v,mech} = 0,8 \frac{\bar{p}_{seg}}{\psi E} \left(\frac{R_m}{d_{seg}} \right)^3 \Omega^3 \frac{\sin(\Omega)}{(1 - \cos(\Omega))} \quad (2.73)$$

Hierbei wird der mittlere Segmentdruck durch eine Dreieckslast angenähert. R_m bezeichnet den mittleren Segmentradius, d_{seg} die Segmentdicke, ψ das relative Lagerpiel, E den E-Modul und Ω den halben Segmentumschließungswinkel. Um während der Zeitintegration das Lösen dieser algebraischen Nebenbedingung zu vermeiden, wird stattdessen die Differenzialgleichung

$$m_{\Delta\psi_v} \cdot \Delta\ddot{\psi}_{v,mech}(t) + d_{\Delta\psi_v} \cdot \Delta\dot{\psi}_{v,mech}(t) + k_{\Delta\psi_v} \cdot \Delta\psi_{v,mech}(t) = \bar{p}_{seg}(t) \quad (2.74)$$

gelöst. Die Segmentaufbiegung weist somit ein dem Druck proportionales Übertragungsverhalten mit einer Verzögerung zweiter Ordnung auf (PT₂-Glieder). Die Formulierung als Differenzialgleichung zweiter Ordnung ist nötig um nach der zeitlichen Integration sowohl die lokale Spalthöhenänderung als auch die Spalthöhenänderungsgeschwindigkeit vorliegen zu haben. In Gleichung (2.74) beschreibt $k_{\Delta\psi_v}$ die Steifigkeit, $d_{\Delta\psi_v}$ die Dämpfung und $m_{\Delta\psi_v}$ die bewegte Masse, die der Biegeverformung zugeordnet werden kann. Aus Gleichung (2.73) und (2.74) folgt für die Steifigkeit

$$k_{\Delta\psi_v} = \left(\frac{0,8}{\psi E} \left(\frac{R_m}{d_{seg}} \right)^3 \Omega^3 \frac{\sin(\Omega)}{(1 - \cos(\Omega))} \right)^{-1}. \quad (2.75)$$

Die bewegte Masse und Dämpfung der Biegebewegung werden so gewählt, dass sich ein Dämpfungsgrad von $D = 100 \%$ und eine Eigenfrequenz ergibt, die etwa der zehnfachen Starrkörpereigenfrequenz des Segmentes entspricht. Durch diese Parameterwahl reagiert die Segmentaufbiegung schnell auf Druckänderungen, ohne überzuschwingen.

Bei punktförmigen Abstützungen ist zudem die axiale Aufbiegung der Segmente zu berücksichtigen. Eine Näherungsbeziehung für die axiale Aufbiegung wird in [12] angegeben, wobei die Segmentbeanspruchung ebenfalls gemittelt und in eine Dreiecksbelastung überführt wird:

$$\Delta h(z) = \frac{1}{960} \frac{F b^3}{EI} (10z^2 - 10z^3 + 5z^4 + z^5) \quad (2.76)$$

Hierin sind F die Segmentkraft, b die Segmentbreite, E der Elastizitätsmodul und I das für die axiale Biegung maßgebende Flächenträgheitsmoment. Die Variable z be-

schreibt den Abstand zur Lagermitte. Analog zur Aufbiegung in Umfangsrichtung wird statt der algebraischen Gleichung (2.76) die Differenzialgleichung

$$m_{\Delta h} \cdot \Delta \ddot{h}(z, t) + d_{\Delta h} \cdot \Delta \dot{h}(z, t) + k_{\Delta h} \cdot \Delta h(z, t) = F(t) \quad (2.77)$$

mit der Steifigkeit

$$k_{\Delta h} = \left(\frac{1}{960} \frac{b^3}{EI} (10z^2 - 10z^3 + 5z^4 + z^5) \right)^{-1} \quad (2.78)$$

gelöst. Da sich die Biegesteifigkeit des Segmentes in Reihe mit dem Schmierfilm befindet, kann die mechanisch-elastische Segmentaufbiegung, ähnlich der Segmentabstützungssteifigkeit, zu einer Reduktion des Dämpfungsvermögens führen. Unsicherheiten bei der Modellierung bestehen besonders in der Einführung und Wahl der bewegten Masse und der Dämpfung, die keiner physikalischen Beschreibung zugrunde liegen, sondern lediglich notwendige Konstanten der Differenzialgleichung darstellen.

2.4 Beschreibung des Axiallagermodells

2.4.1 Schmierspaltströmung und Druckverteilung

Die Schmierspaltströmung in einem Axiallager kann wie beim Radiallager mit der Reynolds'schen Differenzialgleichung beschrieben werden, wobei dieselben Annahmen zugrunde gelegt werden. Zweckmäßigerweise findet die Beschreibung aufgrund der Geometrie in Zylinderkoordinaten statt. Zusätzlich erfolgt die Erweiterung um einen Fliehkraftterm, der bei hohen Umfangsgeschwindigkeiten zu berücksichtigen ist. Die dimensionsbehaftete, verallgemeinerte Reynolds'sche Differenzialgleichung für Axialgleitlager erhält somit die folgende Form, vgl. [55, 95]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{F_{2,Ax}}{K_\varphi} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{F_{2,Ax}}{K_r} \frac{\partial p}{\partial r} \right) \\ = \omega \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\rho^* \frac{F_{1,Ax}}{F_{0,Ax}} \right) + \frac{\rho}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\rho^* \frac{F_{4,Ax}}{K_r} \right) + \frac{\partial}{\partial t} (\rho^* h) \end{aligned} \quad (2.79)$$

mit den Viskositäts- und Fliehkrafttermen

$$\begin{aligned}
 F_{0,Ax} &= \int_0^h \frac{dz}{\eta}, & F_{1,Ax} &= \int_0^h \frac{z}{\eta} dz, & F_{2,Ax} &= \int_0^h \frac{z}{\eta} \left(z - \frac{F_1}{F_0} \right) dz, \\
 F_{3,Ax} &= \int_0^h \frac{1}{\eta} \left(\int_0^z u_\varphi^2 dz \right) dz, & F_{4,Ax} &= \int_0^h \frac{z}{\eta} \left(\int_0^z u_\varphi^2 dz - \frac{F_3}{F_0} \right) dz.
 \end{aligned}
 \tag{2.80}$$

Geometrische Beschreibung des Lagerspalts

Abbildung 2.11 veranschaulicht die wichtigsten geometrischen Parameter zur Beschreibung des Lagerspaltes eines Axiallagers.

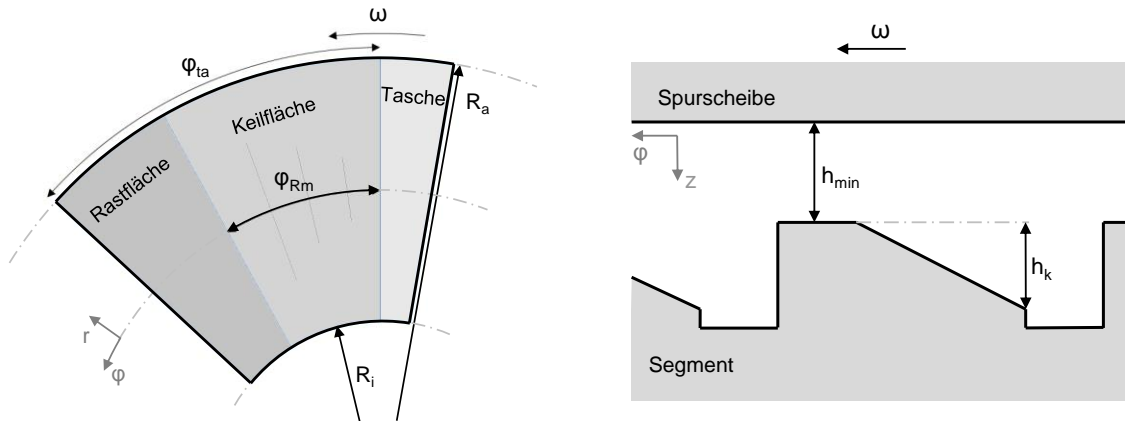


Abbildung 2.11: Geometrische Grundparameter eines Kippsegmentlagers für eine Drehrichtung [54]

Bei unverkanteter Spurscheibe kann das Spalthöhenprofil mit dem Abstand von Spurscheibe und Rastfläche h_{min} im Bereich der Rastfläche beschrieben werden. Im Bereich der Keiffläche beträgt die Spalthöhe

$$h(\varphi, r) = h_{min} + \frac{h_k}{2 \sin\left(\frac{\varphi_{Rm}}{2}\right)} \left[\sin\left(\varphi_{Rm} - \frac{\varphi_{ta}}{2}\right) - \sin\left(\varphi - \frac{\varphi_{ta}}{2}\right) \right].
 \tag{2.81}$$

Die Spaltfunktion kippbeweglicher Segmente nach Abbildung 2.12 kann mit ausreichender Genauigkeit durch

$$\begin{aligned}
 h(\varphi, r) = h_s + \frac{h_k}{2R_k \sin\left(\frac{\varphi_{Rm}}{2}\right)} & \left[R_k \sin\left(\varphi_k - \frac{\varphi_{ta}}{2}\right) - r \sin\left(\varphi - \frac{\varphi_{ta}}{2}\right) \right] \\
 - \frac{h_r}{R_a - R_i} & \left[R_k \cos\left(\varphi_k - \frac{\varphi_{ta}}{2}\right) - r \cos\left(\varphi - \frac{\varphi_{ta}}{2}\right) \right]
 \end{aligned}
 \quad (2.82)$$

beschrieben werden, z.B. [100]. Hierin sind h_s der Abstand der Spurscheibe zum Segment über dem Abstützpunkt und h_k und h_r die Keilhöhen in Umfangs- und radialer Richtung.

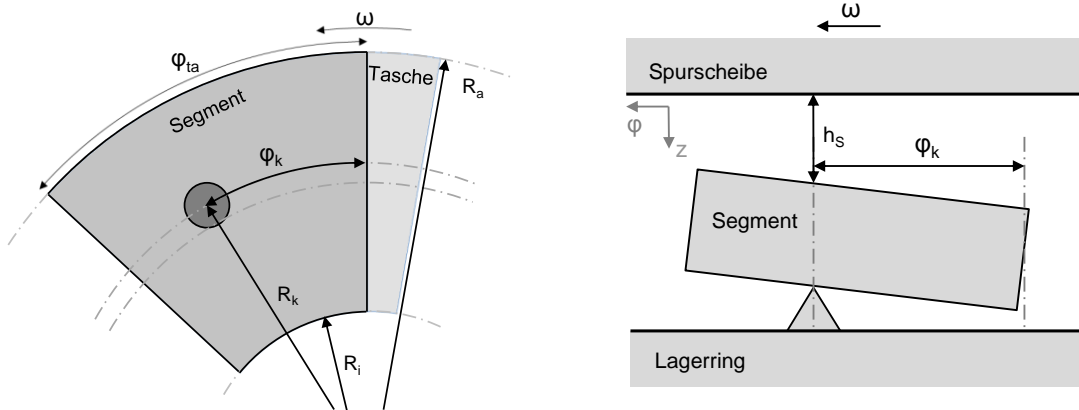


Abbildung 2.12: Geometrische Grundparameter eines Kippsegmentlagers für eine Drehrichtung [54]

Die Berücksichtigung einer Verkantung von Lagerring und Spurscheibe kann mit den Kippwinkeln α_x und α_y in der Spalthöhe berücksichtigt werden [100]:

$$\Delta h(\varphi, r) = r \alpha_y \cos(\varphi) + r \alpha_x \sin(\varphi) \quad (2.83)$$

Hierzu zeigt Abbildung 2.13 ein verkantetes, doppelt wirkendes Axiallager mit zwei Spurscheiben.

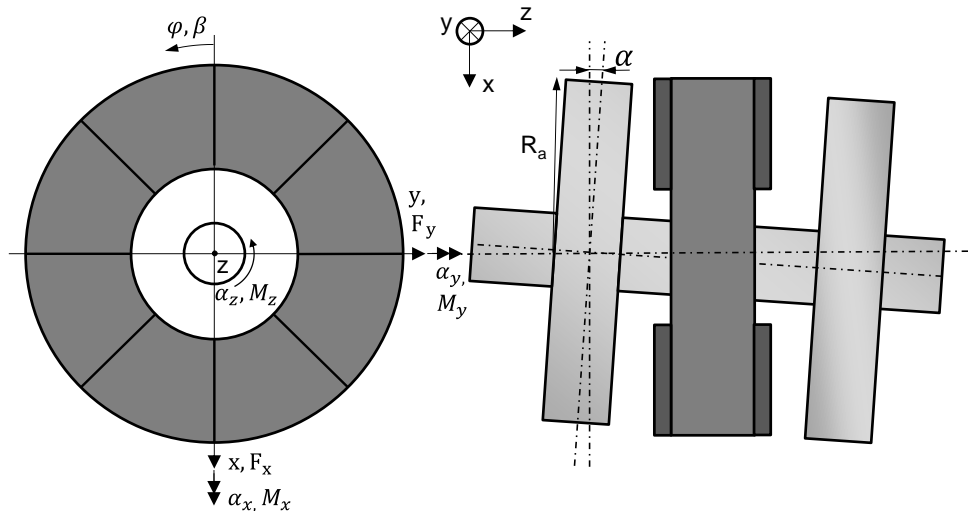


Abbildung 2.13: Doppeltwirkendes Axiallager mit zwei Spurscheiben, vgl. [96]

Für die Ermittlung des thermischen Lagerzustandes werden prinzipiell die gleichen Annahmen getroffen wie beim Radiallagermodell aus Abschnitt 2.3.6, wobei das Axialgleitlagerberechnungsprogramm COMBROS-A zum Einsatz kommt [54]. Für weiterführende Informationen zum thermischen Axiallagermodell sei auf [55] verwiesen.

2.4.2 Linearisierte Axiallagerkoeffizienten

Die Beschreibung der dynamischen Schmierfilmkräfte erfolgt analog zum Radiallager auf Basis einer linearen Störungsrechnung. In [55] sind die Störungsgleichungen explizit aufgeführt. Bislang werden die dynamischen Axiallagerkoeffizienten nur für den Schmierfilm berechnet, wodurch sie zwar zur Beschreibung von Festsegmentlagerkräften geeignet sind, aber die Kippbeweglichkeit der Segmente im Falle von Kippsegmentlagern nicht berücksichtigen. Beim axialen Traglager vertikaler Maschinen kommen jedoch zumeist Kippsegmentlager zum Einsatz, weshalb die Bildung der resultierenden Gesamtsteifigkeit kippbeweglicher Segmente hier explizit beschrieben wird. Die Modifikation erfolgt in Anlehnung zur Vorgehensweise bei Radialkippsegmentgleitlagern [74]. Abbildung 2.14 zeigt ein einzelnes Segment mit eingezeichnetem Segmentkoordinatensystem im globalen Lagerkoordinatensystem (*Lag*). Die Koeffizienten des Schmierfilms beziehen sich zunächst auf das Segmentkoordinatensystem (*seg*).

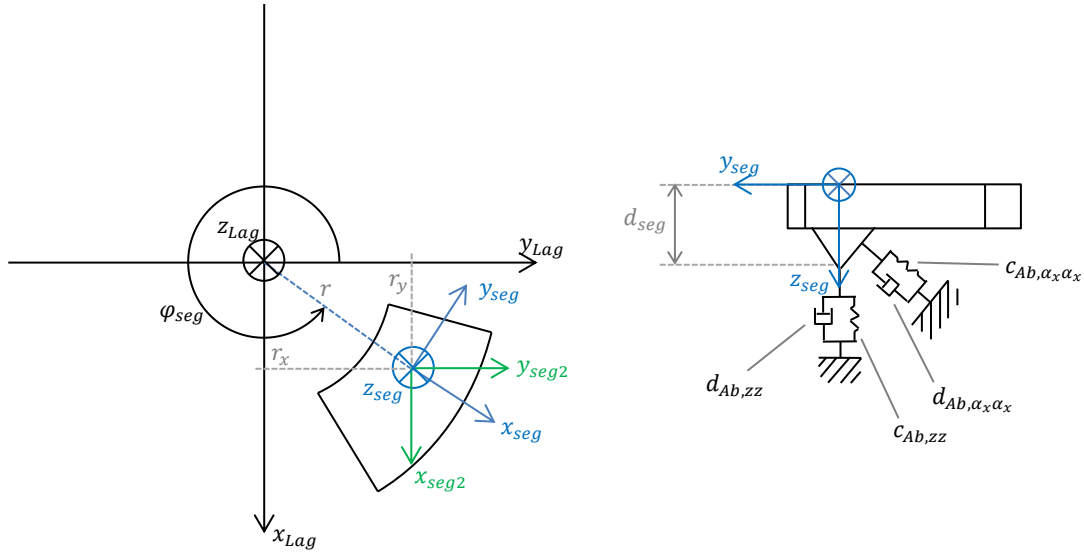


Abbildung 2.14: Lage des Segmentkoordinatensystems (seg) im globalen Lagerkoordinatensystem (Lag)

Die Rückstellkraft eines Einzelsegmentschmierfilms infolge einer Segmentbewegung lautet in linearer Näherung:

$$\Delta \mathbf{F}_{seg} = \mathbf{C}_{seg} \mathbf{z}_{seg} + \mathbf{D}_{seg} \dot{\mathbf{z}}_{seg}$$

$$\Delta \mathbf{F}_{seg} = \begin{pmatrix} \Delta F_x \\ \Delta F_y \\ \Delta F_z \\ \Delta M_x \\ \Delta M_y \\ \Delta M_z \end{pmatrix} \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{pmatrix}_{seg} \quad (2.84)$$

$$\mathbf{C}_{seg} = \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xy} & c_{xz} & c_{x\alpha_x} & c_{x\alpha_y} & c_{z\alpha_z} \\ c_{yx} & c_{yy} & c_{yz} & c_{y\alpha_x} & c_{y\alpha_y} & c_{y\alpha_z} \\ c_{zx} & c_{zy} & c_{zz} & c_{z\alpha_x} & c_{z\alpha_y} & c_{z\alpha_z} \\ c_{\alpha_x x} & c_{\alpha_x y} & c_{\alpha_x z} & c_{\alpha_x \alpha_x} & c_{\alpha_x \alpha_y} & c_{\alpha_x \alpha_z} \\ c_{\alpha_y x} & c_{\alpha_y y} & c_{\alpha_y z} & c_{\alpha_y \alpha_x} & c_{\alpha_y \alpha_y} & c_{\alpha_y \alpha_z} \\ c_{\alpha_z x} & c_{\alpha_z y} & c_{\alpha_z z} & c_{\alpha_z \alpha_x} & c_{\alpha_z \alpha_y} & c_{\alpha_z \alpha_z} \end{bmatrix}$$

Für die Rückstellkraft der Abstützung wird die gleiche Beschreibung herangezogen, wobei die Matrizen der Abstützung beliebig besetzt werden können, sofern diese nichtsingulär bleiben. Die Segmentdicke d_{seg} trennt die Angriffspunkte der Abstützung und des Ölfilms, weshalb die Steifigkeiten der Abstützung auf die Segmentoberseite umgerechnet werden. Hierbei ist zu beachten, dass die translatorische Steifigkeit $c_{Ab,xx}$ bzw. $c_{Ab,yy}$ und die Winkelsteifigkeit $c_{Ab,\alpha_y\alpha_y}$ bzw. $c_{Ab,\alpha_x\alpha_x}$ an der Seg-

mentoberseite eine Reihenschaltung bilden. Bei einer rein diagonal besetzten Abstützungssteifigkeitsmatrix ergibt sich somit:

$$\begin{aligned}
 c_{Ab,xx}' &= \left(\frac{1}{c_{Ab,xx}} + \frac{d_{seg}^2}{c_{Ab,\alpha_y\alpha_y}} \right)^{-1} \\
 c_{Ab,yy}' &= \left(\frac{1}{c_{Ab,yy}} + \frac{d_{seg}^2}{c_{Ab,\alpha_x\alpha_x}} \right)^{-1} \\
 c_{Ab,\alpha_x\alpha_x}' &= \left(\frac{1}{c_{Ab,yy}d_{seg}^2} + \frac{1}{c_{Ab,\alpha_x\alpha_x}} \right)^{-1} \\
 c_{Ab,\alpha_y\alpha_y}' &= \left(\frac{1}{c_{Ab,xx}d_{seg}^2} + \frac{1}{c_{Ab,\alpha_y\alpha_y}} \right)^{-1}
 \end{aligned} \tag{2.85}$$

Das System wird auf die Axialkraft und die Kippmomente reduziert, da die Radialkräfte in der Regel vernachlässigbar gering sind:

$$\begin{aligned}
 \Delta \mathbf{F}_{seg} &= \mathbf{C}_{seg} \mathbf{z}_{seg} + \mathbf{D}_{seg} \dot{\mathbf{z}}_{seg} \\
 \Delta \mathbf{F}_{seg} &= \begin{pmatrix} \Delta F_z \\ \Delta M_x \\ \Delta M_y \end{pmatrix} \quad \mathbf{C}_{seg} = \begin{bmatrix} c_{zz} & c_{z\alpha_x} & c_{z\alpha_y} \\ c_{\alpha_y z} & c_{\alpha_x\alpha_x} & c_{\alpha_x\alpha_y} \\ c_{\alpha_z z} & c_{\alpha_y\alpha_x} & c_{\alpha_y\alpha_y} \end{bmatrix} \quad \mathbf{z}_{seg} = \begin{pmatrix} z \\ \alpha_x \\ \alpha_y \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.86}$$

Durch Annahme einer harmonischen Schwingbewegung von Spurscheibe und Segment, können in der komplexen Ebene die komplexen Steifigkeiten \mathbf{C}_{seg}^* und \mathbf{C}_{Ab}^* in Zeigerschreibweise geschrieben werden:

$$\mathbf{C}_{seg}^* = \mathbf{C}_{seg} + j\omega \mathbf{D}_{seg} \tag{2.87}$$

$$\mathbf{C}_{Ab}^* = \mathbf{C}_{Ab} + j\omega \mathbf{D}_{Ab}$$

Die Forderung, dass zu jeder Zeit das Kräftegleichgewicht zwischen Abstützungs- und Schmierfilmkräften erfüllt ist, führt auf die komplexe, resultierende Gesamtsteifigkeitsmatrix

$$\mathbf{C}_{res,seg}^* = \left(\mathbf{C}_{seg}^{*-1} + \mathbf{C}_{Ab}^{*-1} \right)^{-1}. \tag{2.88}$$

Diese Gesamtsteifigkeit berücksichtigt die elastische Abstützung und die Kippbeweglichkeit des Segmentes. Die Einzelsegmentkoeffizienten werden nun in das globale Lagerkoordinatensystem transformiert. Hierzu erfolgt im ersten Schritt eine Drehung des Segmentkoordinatensystems (*seg*) um die z-Achse in das System (*seg2*), dessen x- und y-Achse parallel zum Lagerkoordinatensystem ausgerichtet ist:

$$\mathbf{C}_{res,seg2}^* = \mathbf{T}_{rot} \mathbf{C}_{res,seg}^* \mathbf{T}_{rot}^T$$

$$\mathbf{T}_{rot} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\pi - \varphi_{seg}) & -\sin(\pi - \varphi_{seg}) \\ 0 & \sin(\pi - \varphi_{seg}) & \cos(\pi - \varphi_{seg}) \end{bmatrix} \quad (2.89)$$

Im zweiten Schritt folgt eine Verschiebung des Koordinatensystems (*seg2*) in das Lagerkoordinatensystem (*Lag*):

$$\mathbf{C}_{res,Lag,i}^* = \mathbf{C}_{res,seg2}^* + c_{res,seg2,zz}^* \mathbf{T}_{trans}$$

$$\mathbf{T}_{trans} = \begin{bmatrix} 0 & r_y & -r_x \\ r_y & r_y^2 & -r_x r_y \\ -r_x & -r_x r_y & r_x^2 \end{bmatrix} \quad (2.90)$$

Im Lagerkoordinatensystem erfolgt die Summation aller Segmentkoeffizienten, woraus sich schließlich die Gesamtlagerkoeffizienten mit Bezug auf die Spurscheibenbewegung ergeben:

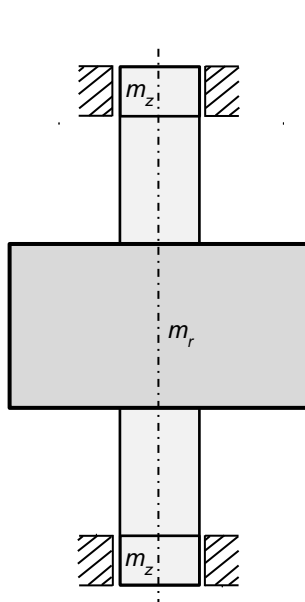
$$\mathbf{C}_{res,Lag}^* = \sum_{i=1}^{N_{seg}} \mathbf{C}_{res,Lag,i}^* \quad (2.91)$$

Da beim Bilden der resultierenden, komplexen Steifigkeitsmatrix die Schwingungsfrequenz eingeht, besitzen die Koeffizienten im Allgemeinen eine Frequenzabhängigkeit.

3. Verifikation und Validierung des Lagermodells

3.1 Verifikation des volldynamischen Kippsegmentlagermodells

Um die Vorhersagen des hier entwickelten volldynamischen Kippsegmentlager-Modells zu verifizieren, wird ein Vergleich mit einer in der Literatur veröffentlichten Berechnung durchgeführt [25]. Der symmetrische, vertikale Rotor aus Abbildung 3.1 besitzt eine Rotormasse und zwei Zapfenmassen mit jeweils einem Zehntel der Rotormasse. Er ist in zwei 12-Kippsegmentlagern mit elastischer Segmentabstützung gelagert. Die Segmente sind profiliert und besitzen eine linear elastische, mittige Abstützung mit geschwindigkeitsproportionaler Dämpfung. Ferner existiert in der Abstützung eine Kippsteifigkeit und -dämpfung. Am Rotor greifen eine äußere Dämpfung und ein magnetischer Zug, jedoch keine statische Kraft an.



Rotor

- Rotormasse $m_r = 2 \cdot 10^5 \text{ kg}$
- Zapfenmasse $m_z = 2 \cdot 10^4 \text{ kg}$
- Schwerpunktsexzentrizität $e_0 = 500 \text{ }\mu\text{m}$
- Wellensteifigkeit $k_w = 8 \cdot 10^9 \text{ N/m}$
- Magnetischer Zug $k_{mag} = 2 \cdot 10^8 \text{ N/m}$
- Äußere Rotordämpfung $d_r = 4 \cdot 10^6 \text{ Ns/m}$

Lager

- 12-Kippsegmentlager
- Durchmesser $D = 1300 \text{ mm}$
- Breite $B = 250 \text{ mm}$
- Rel. Lagerspiel $\psi = 0,308 \text{ ‰}$ ($h_0 = 200 \text{ }\mu\text{m}$)
- Profilierung $\psi_v = 7,5$
- Segmentlänge $L_{seg} = 250 \text{ mm}$
- Segmentdicke $d_{seg} = 85 \text{ mm}$
- Mittige, linear-elastische Abstützung
- Rad. Abstützungssteifigkeit $k_{\zeta,seg} = 0,7 \text{ kN/}\mu\text{m}$
- Drehstützsteifigkeit $k_{\varphi\theta,seg} = 1 \cdot 10^5 \text{ N/m}$
- Rad. Abstützungsdämpfung $d_{\zeta,seg} = 75 \text{ Ns/mm}$
- Drehstützdämpfung $d_{\varphi\theta,seg} = 100 \text{ Nsm}$
- Segmentmasse $m_{seg} = 50 \text{ kg}$
- Segmentmassenträgheitsmoment $J_{\theta\theta} = 0,26 \text{ kgm}^2$

Abbildung 3.1: Lavalläufer in 12-Kippsegmentlagern mit Angabe der Rotor- und Lagerdaten nach [25].

Abbildung 3.2 zeigt die Ergebnisse der Rotordynamiksimulation unter Verwendung des volldynamischen Kippsegmentlagermodells im Vergleich mit den Rechenergebnissen nach [25]. Das System verhält sich wie nach [25] beschrieben. Zunächst befinden sich die radialen Wege von Rotor und Zapfen im geometrischen Lagerzentrum.

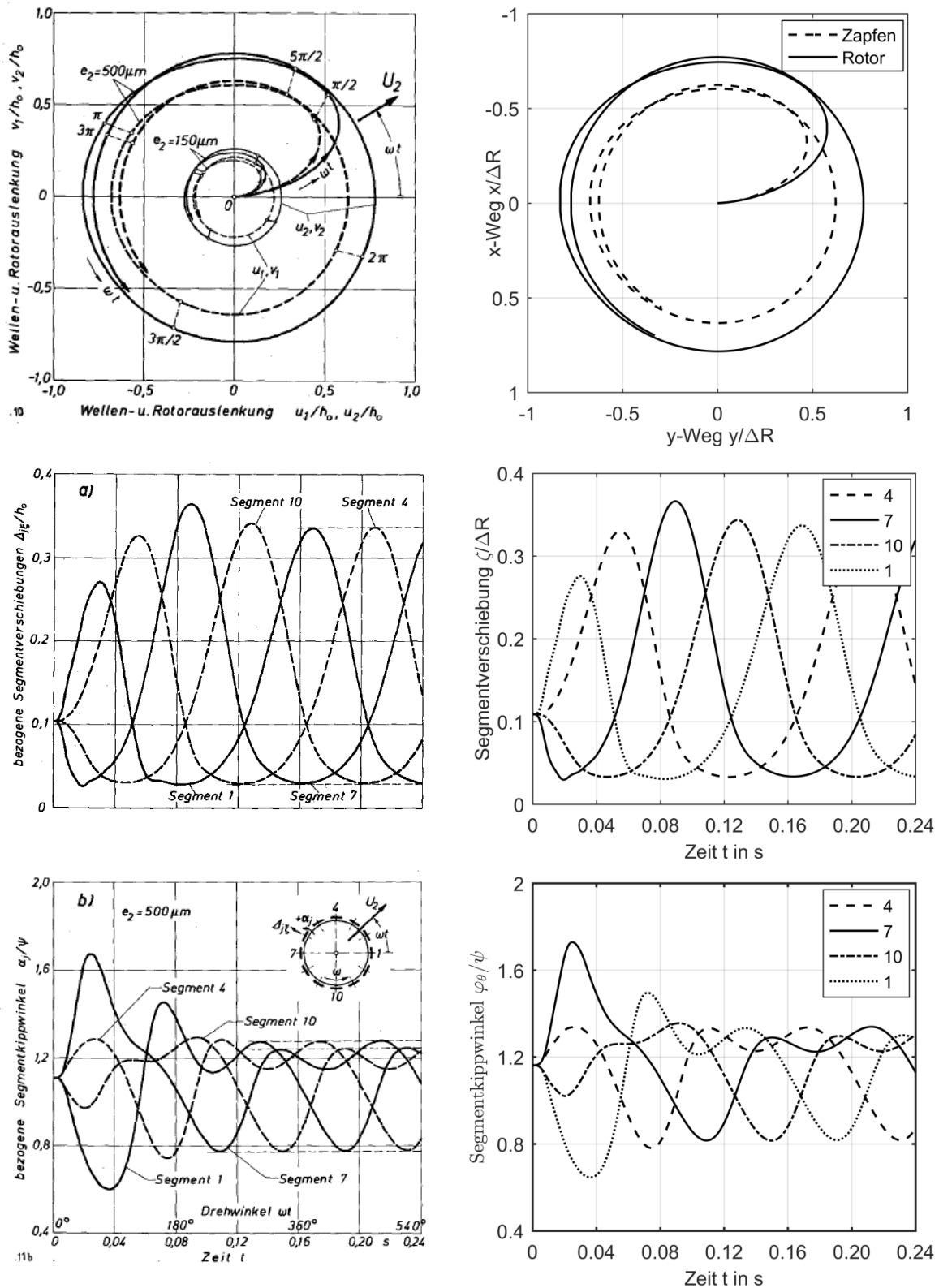


Abbildung 3.2: Zustandsgrößen eines vertikalen Lavalläufers in 12-Kippsegmentlagern bei plötzlich auftretender Unwucht. Oben: Bahnkurven von Rotor und Zapfen, bezogen auf das Lagerspiel ($h_0 = \Delta R$); Mitte: Segmentabsenkung, bezogen auf das Lagerspiel; Unten: Segmentkippwinkel, bezogen auf das rel. Lagerspiel ψ . Vergleich der mit dem dynamischen Kippsegmentlagermodell berechneten Lösung (rechts) mit der Lösung nach [25] (links)

Nach Aufbringen einer plötzlich auftretenden Unwucht laufen Rotor und Zapfen auf Bahnkurven, die praktisch als Kreisbahnen beschrieben werden können. Das System ist nach ca. einer Umdrehung bereits eingeschwungen. Obwohl der Zapfen eine harmonische Bewegung ausführt, weichen die Bewegungen der Segmente von der harmonischen Form ab.

3.2 Validierung des volldynamischen Kippsegmentlagermodells

Zur Validierung des dynamischen Lagermodells werden dynamische Schwingungsmessungen an einem Vierflächen-Festsegmentlager und einem 5-Kippsegmentlager aus [17] herangezogen. Die Daten des Kippsegmentlagers sind in Tabelle 3.1 und die des Festsegmentlagers in Tabelle 3.2 zusammengefasst.

Tabelle 3.1: Daten des 5-Kippsegmentlagers, Zeichnung vgl. [12]

Rotor		
Drehzahl n in 1/min	3600	
Lager	5-KSL	
Anzahl Segmente	5	
Innendurchmesser D mm	120	
Breite B in mm	52,8	
Segmentdicke d_{seg} in mm	17,8	
Relatives Lagerspiel ψ in ‰	1,63	
Profilierung ψ_v	2,8	
Segmentumschließungswinkel in °	50	
Abstützungsverhältnis Ω	0,5	
Länge des Abstützkontaktes l in mm	26,4	
Masse des Lagers inkl. aller bewegten Teile in kg [98]	70	
Schmierstoff		
ISO VG Klasse	32	
Zuführtemperatur in °	50	

Tabelle 3.2: Daten des Vierflächenlagers, Zeichnung vgl. [12]

Rotor		
Drehzahl n in 1/min	3600	
Lager	4FL	
Anzahl Gleitflächen	4	
Innendurchmesser D mm	120	
Breite B in mm	96	
Außendurchmesser D_a in mm	17,8	
Relatives Lagerspiel ψ in ‰	1,5	
Profilierung ψ_v	6,463	
Segmentumschließungswinkel in °	70	
Masse des Lagers inkl. aller bewegten Teile in kg [98]	70	
Schmierstoff		
ISO VG Klasse	32	
Zuführtemperatur in °	50	

Die Lager werden mit verschiedenen statischen Kräften von $F_{stat} = 0 \dots 10 \text{ kN}$ in vertikaler Richtung belastet. Bei jeder statischen Last erfolgt zusätzlich nacheinander eine harmonische, drehzahlsynchrone Anregung in horizontaler und vertikaler Richtung, wobei die Amplitude der Kraft variiert wird. Im Prüfstandsversuch wird die Erregerkraft durch das Lagergehäuse eingeleitet und die Relativbewegung zwischen Lager und Wellenzapfen gemessen. Der Wellenzapfen ist mit zwei Stützlagern abgestützt. Da die Stützlagereigenschaften unbekannt sind, wird deren Nachgiebigkeit in der Berechnung vernachlässigt und die absolute Lageramplitude ausgewertet.

Kippsegmentlager

Beim Kippsegmentlager ist die statische Kraft auf die Segmentlücke zwischen den unteren beiden Segmenten gerichtet. Die Berücksichtigung der Segmentabstützungselastizität erfolgt durch die lastabhängige Beziehung von Kraft und Abplattung nach Gleichung (2.37). Abbildung 3.3 zeigt die gemessenen und berechneten Lagerzapfenamplituden für die verschiedenen Lastfälle. Die Erregungen sind groß genug, um weit in den nichtlinearen Bereich vorzudringen. Über den gesamten Lastbereich ergibt sich eine sehr gute qualitative und quantitative Übereinstimmung von Messung und Rechnung.

Festsegmentlager

Die statische Kraft zeigt beim Vierflächenlager auf die Gleitflächenmitte eines Segmentes. Die Mess- und Rechenergebnisse sind in Abbildung 3.4 gegenüber gestellt. Wie der Vergleich zeigt, bildet die Berechnung die Charakteristik der gemessenen Amplituden sehr gut nach. Für die Betriebspunkte mit statischer Grundlast kann auch die quantitative Übereinstimmung als sehr gut bezeichnet werden. Mit abnehmender statischer Last nehmen die Abweichungen von Messung und Rechnung zu.

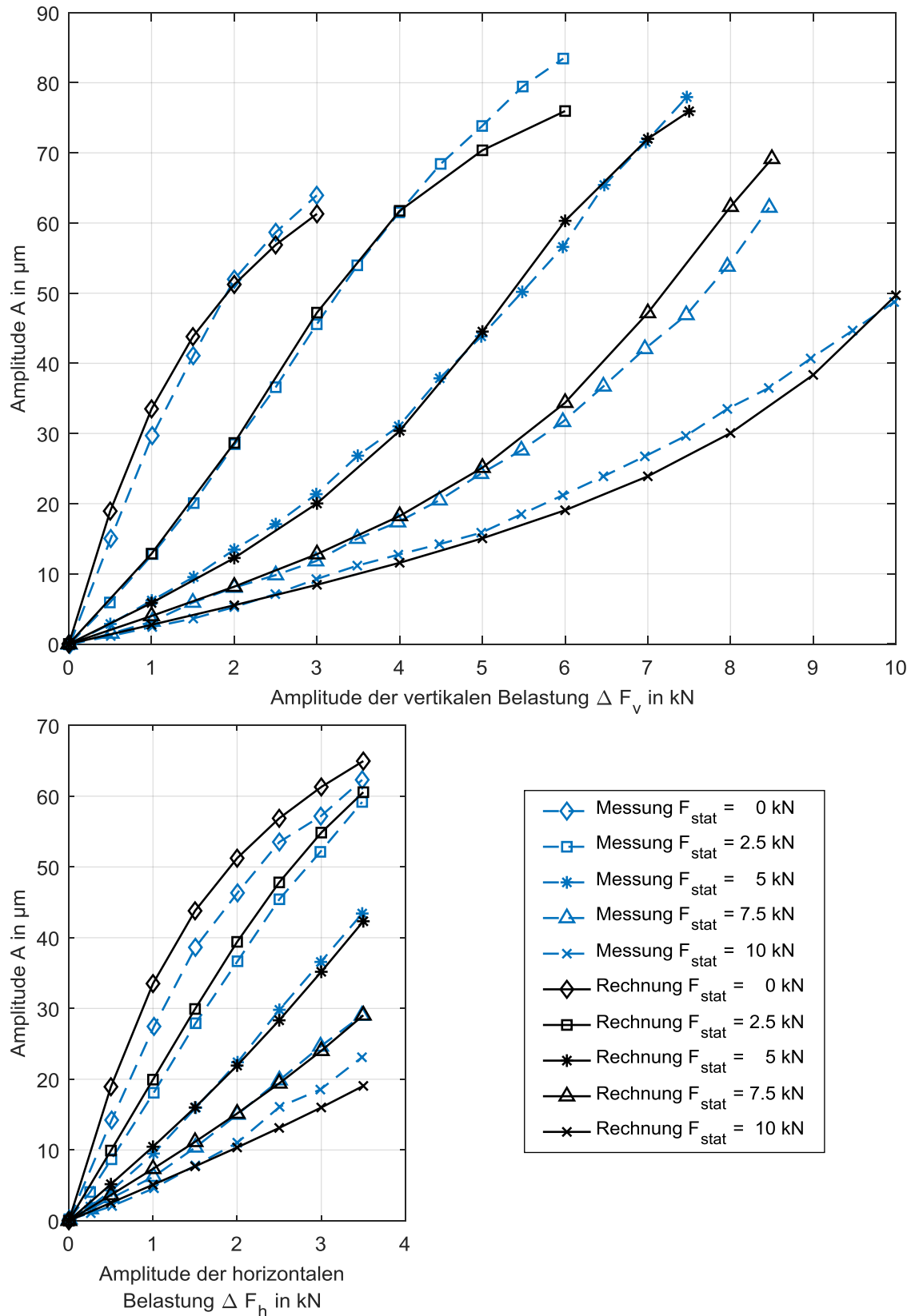


Abbildung 3.3: Gemessene [17] und berechnete Schwingungsamplituden des 5-Kippsegmentlagers für verschiedene statische und dynamische Lasten, Oben: vertikale Zusatzbelastung, Unten: horizontale Zusatzbelastung

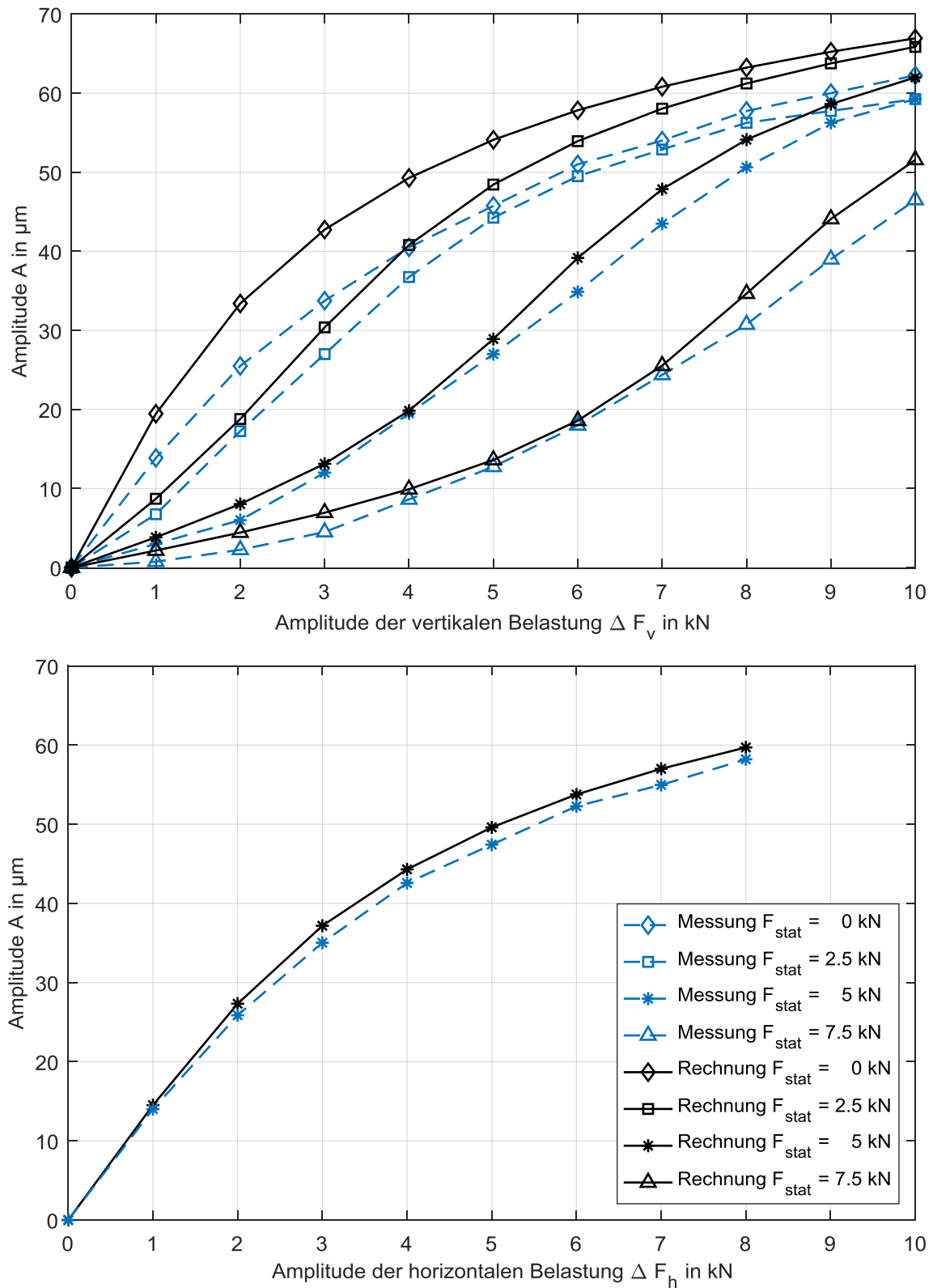


Abbildung 3.4: Gemessene [17] und berechnete Schwingungsamplituden des Vierflächenlagers für verschiedene statische und dynamische Lasten, Oben: vertikale Zusatzbelastung, Unten: horizontale Zusatzbelastung

4. Untersuchung des Systemverhaltens am vertikalen Lavalläufer

4.1 Linearisierungshypothese

Die Lage der ersten kritischen Drehzahl ist für die rotordynamische Analyse vertikaler Maschinen von besonderem Interesse. Mit zunehmender Exzentrizität tritt eine Versteifung des Lagers ein, wodurch auch die Resonanzdrehzahl ansteigt. Es liegt also eine Abhängigkeit der kritischen Drehzahl von der Unwuchterregung vor. Zur Veranschaulichung der Resonanzanhebung erfolgen zunächst grundlegende, vereinfachte Untersuchungen am Lavalläufer. Abbildung 4.1 zeigt hierfür die Skizze eines unwuchtigen Lavalläufers und das entsprechende mechanische Ersatzmodell.

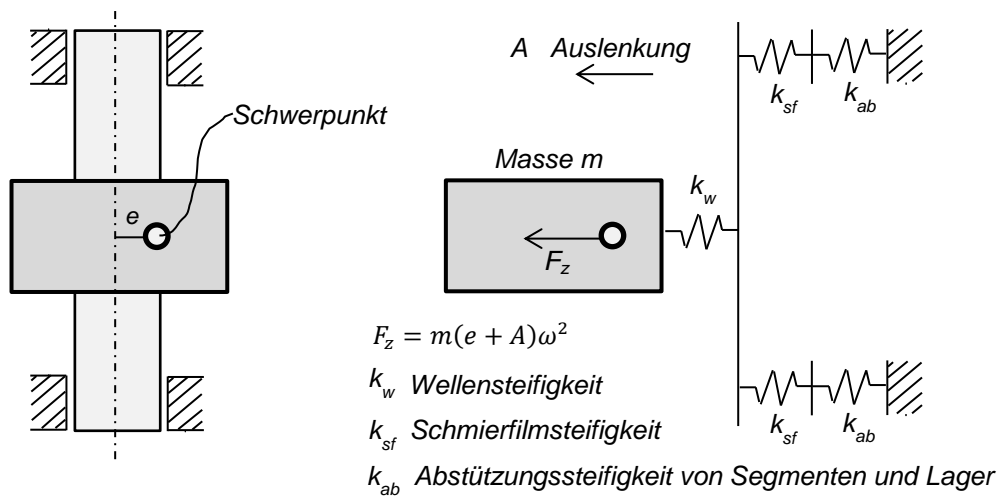


Abbildung 4.1: Links: Skizze eines Lavalläufers, Rechts: Mechanisches Ersatzmodell

Durch Bilden der mittleren, resultierenden Summen-Steifigkeit der Segmentabstützungen nach

$$k \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{seg}} k_{seg,i} \cdot \cos^2(\tau_{seg,i}) \quad (4.1)$$

können die Abstützungssteifigkeiten der Einzelsegmente mit der Lagerabstützungssteifigkeit zusammengefasst werden. Zur Abschätzung der maximal möglichen Resonanzanhebung des Rotors wird die folgende „Linearisierungshypothese“ aufgestellt, die in den folgenden Kapiteln immer wieder simulativ bestätigt wird. Die Hypothese besagt, dass sich der Schmierfilm bei einer hinreichend großen Unwucht so stark versteift, dass er gegenüber den anderen Elastizitäten im System als unendlich steif angesehen werden kann und keinen Einfluss mehr auf das System besitzt.

Hierdurch erlangt das Schwingssystem wieder einen linearen Charakter. Die maximal mögliche Resonanzanhebung des Rotors tritt somit bei totaler Versteifung des Ölfilms auf. Beim Lavalläufer besitzt die erste Eigenfrequenz keine Drehzahlabhängigkeit, weshalb die kritische Drehzahl direkt mit der ersten berechneten Eigenfrequenz zusammenfällt. Bei geringen Schwingungsamplituden erhält man die kritische Drehzahl durch Berücksichtigung der Schmierfilmsteifigkeit des statischen Betriebspunktes k_{sf} , der Abstützungssteifigkeit k_{ab} und der Wellensteifigkeit k_w :

$$\omega_{0,u} = \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{2k_{sf}} + \frac{1}{2k_{ab}} + \frac{1}{k_w}\right)^{-1}}{m}} \quad (4.2)$$

Für große Schwingungsamplituden ergibt sich unter Annahme der vollständigen Schmierfilmversteifung eine kritische Drehzahl von

$$\omega_{0,o} = \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{2k_{ab}} + \frac{1}{k_w}\right)^{-1}}{m}}. \quad (4.3)$$

Durch Bildung der relativen Änderung der kritischen Drehzahl

$$\Delta\omega_{krit,u} = \frac{\omega_{0,o} - \omega_{0,u}}{\omega_{0,u}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2k_{sf}} + \frac{1}{2k_{ab}} + \frac{1}{k_w}}}{\sqrt{\frac{1}{2k_{ab}} + \frac{1}{k_w}}} - 1 \quad (4.4)$$

erhält man eine Beschreibung, die beim Lavalläufer nur von den Elastizitätsverhältnissen und nicht von der Rotormasse abhängig ist. Die Lösung von Gleichung (4.4) ist in Abbildung 4.2 in Abhängigkeit der Wellensteifigkeit k_w , der Abstützungssteifigkeit k_{ab} und der linearisierten Schmierfilmsteifigkeit k_{sf} des statischen Betriebspunktes dargestellt. Bei simultaner Erhöhung der Wellen- und Abstützungssteifigkeit streben die obere kritische Drehzahl $\omega_{0,o}$ und somit auch die Erhöhung der kritischen Drehzahl $\Delta\omega_{krit}$ progressiv ins Unendliche. Ein gleitgelagerter, starrer Rotor mit starrer Lagerabstützung und großer Unwucht besitzt deshalb keine Resonanz. Stattdessen streben die Amplituden mit der Drehzahl asymptotisch gegen das Lagerspiel. Besitzen alle Steifigkeiten dagegen den gleichen Wert, liegt eine maximale Erhöhung

der kritischen Drehzahl von $\Delta\omega_{krit} \approx 15,5\%$ vor. Liegen gegenüber der Schmierfilmsteifigkeit geringe Abstützungs- und Wellensteifigkeiten vor, existiert keine nennenswerte Änderung und die Anhebung der kritischen Drehzahl kann vernachlässigt werden. Die tatsächliche Resonanzanhebung befindet sich unterhalb des theoretischen Maximalwertes und ist von der Unwuchterregung bzw. der Zapfenauslenkung abhängig. Bei Rotoren mit gyroroskopischer Eigenfrequenzverschiebung weicht das dargestellte Verhalten zusätzlich ab.

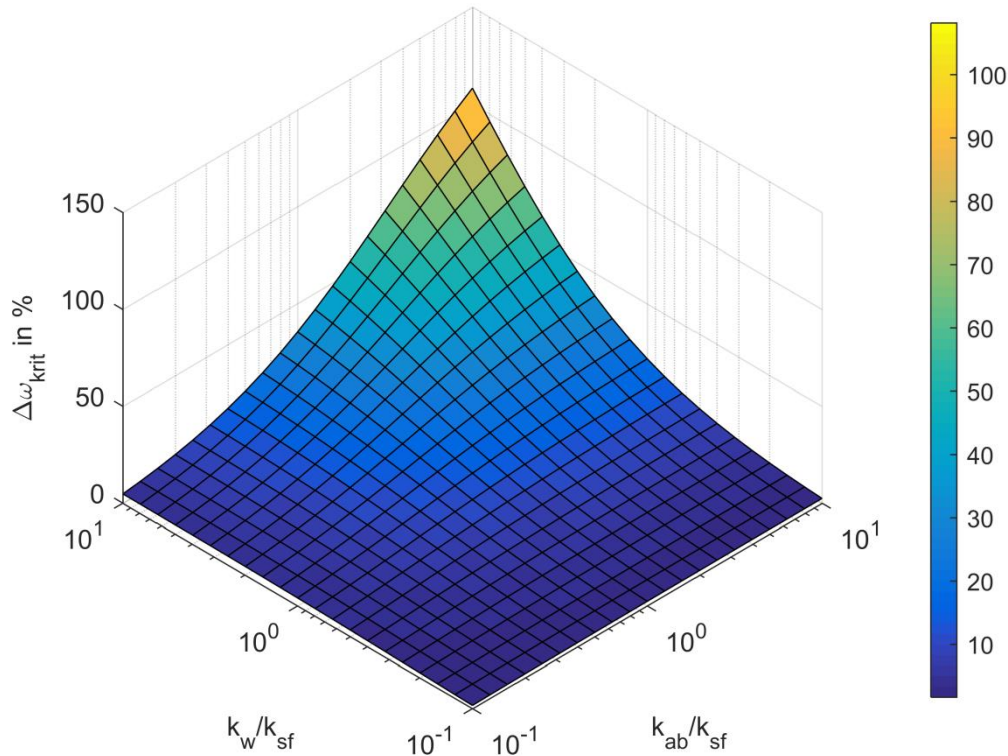


Abbildung 4.2: Maximal mögliche Anhebung der kritischen Drehzahl $\Delta n_{krit} = \Delta\omega_{krit}$ eines Lavalläufers in Abhängigkeit der Wellensteifigkeit k_w , der Abstützungssteifigkeit k_{ab} und der Schmierfilmsteifigkeit k_{sf} des statischen Betriebspunktes

Die Grenzwerte der kritischen Drehzahl können aber im Allgemeinen aus der rotor-spezifischen Critical-Speed-Map abgelesen werden. Hierbei ist jedoch zu beachten, dass insbesondere die untere kritische Drehzahl aufgrund von Lagerdämpfungs- und Kreuzkopplungseffekten von der Critical-Speed-Map abweichen kann. Ein genauerer Wert ergibt sich deshalb aus dem linearen Amplitudengang unter Berücksichtigung der dynamischen Lagerkoeffizienten. Durch Vernachlässigung der Schmierfilmelastizität erhält man die kritische Drehzahl bei vollständiger Schmierfilmversteifung und somit die maximal mögliche Anhebung der kritischen Drehzahl. Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass bei geringen Elastizitätsverhältnissen von $k_w/k_{sf} \ll 1$ und $k_{ab}/k_{sf} \ll 1$ durch eine nichtlineare Betrachtungsweise kein Mehrwert bezüglich der

kritischen Drehzahl erwartet werden kann. Umgekehrt liegt bei großen Elastizitätsverhältnissen eine potenzielle Abhängigkeit der kritischen Drehzahl vom Wuchtzustand vor, wodurch sich eine nichtlineare Betrachtung zur Bestimmung der kritischen Drehzahl empfiehlt.

4.2 Variationsrechnungen am Lavalläufer in Kippsegmentlagern

Der Lavalläufer entspricht in seinen dynamischen Eigenschaften, Masse, Wellensteifigkeit und Zapfendurchmesser weitestgehend der Generatorwelle der Hydrokraftwerksanlage aus Abschnitt 6.1. In Tabelle 4.1 sind die Rotor- und Lagerdaten zusammengefasst.

Tabelle 4.1: Rotor- und Lagerdaten des Lavalläufers in Kippsegmentlagern

Rotor				
Gesamtmasse m_{ges} in kg	59783			
Rotormasse m_R in kg (diskrete Masse in der Rotormitte)	32530			
Wellenmasse m_w in kg (kontinuierlich verteilt)	27253			
Wellensteifigkeit k_w in kN/ μ m	4,84			
Lagerabstand l_{la} in mm	4480			
Erste kritische Drehzahl in starren Lagern in 1/min	3183			
Zulässige Exzentrizität der Gesamtmasse in μ m bei einer Auswuchtgütestufe von G6,3 bei der Nennndrehzahl $n = 1000$ 1/min	60			
Kippsegmentlager Variante	1	2	3	4
Anzahl Segmente	8			4
Radialspiel ψ in ‰	0,37		0,2778	0,5
Radialspiel ΔR in μ m	200		150	200
Profilierung ψ_v	32,67			2,33
Durchmesser D in mm	1080			800
Außendurchmesser der Segmente D_a in mm	1240			1000
Breite B in mm	170			210
Segmentumschließungswinkel in °	16			55
Abstützungsverhältnis Ω	0,5			0,5
Segment-Abstützungssteifigkeit $k_{ab,seg}$ in kN/ μ m	5	0,5	5	5
Lager-Abstützungssteifigkeit $k_{ab,lr}$ in kN/ μ m	2,665			
Kritische Drehzahl n_{krit} in 1/min (Koeffizienten des Lagerzentrums)	1200	925	1675	1550
Kritische Drehzahl bei totaler Schmierfilmversteifung n_{krit} in 1/min	2000	1360	2000	1880
Maximale Änderung der kritischen Drehzahl nach der Linearisierungshypothese in %	67	47	19	21
Schmierstoff				
ISO-VG Klasse	46			
T_{Betr} in °C	55			

Es werden vier Lagervarianten untersucht, wobei es sich bei den ersten drei um 8-Kippsegmentlager und bei der Vierten um ein 4-Kippsegmentlager handelt. Die 8-Kippsegmentlager unterscheiden sich in der Segmentabstützungssteifigkeit und dem Lagerspiel. Für alle Varianten ist die maximal mögliche Anhebung der kritischen Drehzahl nach der oben angesprochenen Linearisierungshypothese angegeben. Zur Bestimmung der kritischen Drehzahl werden für verschiedene Unwuchtbeträge quasistationäre Amplitudengangdiagramme, unter Verwendung des volldynamischen Kippsegmentlagermodells, erstellt.

4.2.1 Untersuchung verschiedener Lagervarianten

Die folgenden Untersuchungen erfolgen zunächst mit statisch unbelasteten Lagern. Abbildung 4.3 vergleicht die Amplitudengangdiagramme des Lavalläufers mit Lagervariante 1 für verschiedene Schwerpunktsexzentrizitäten, wobei zusätzlich die linearisierte Berechnung für die geringste Unwucht angegeben ist. Im linearen Fall finden die Koeffizienten des Lagerzentrums Anwendung.

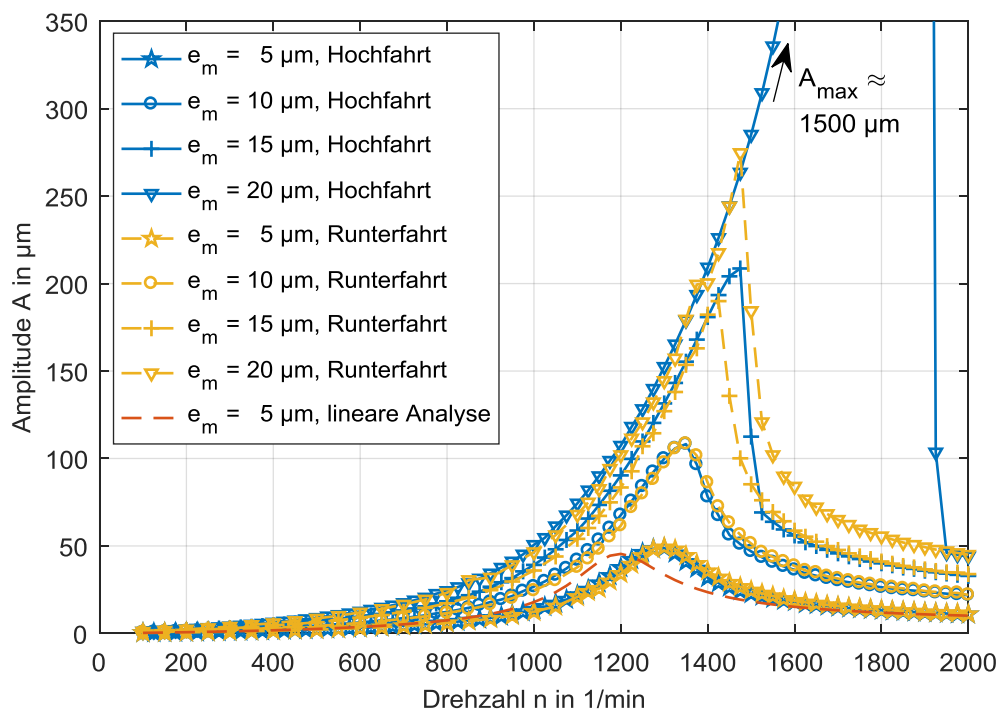


Abbildung 4.3: Amplitudengang der Rotormasse des Lavalläufers aus Tabelle 4.1 mit der Lagervariante 1

Bedingt durch die Nichtlinearität der Lagerkräfte kann im Allgemeinen eine Abhängigkeit der Amplitude von den Anfangsbedingungen vorliegen. Aus diesem Grund erfolgt im Sinne der Pfadverfolgung die Berechnung der Betriebspunkte stets ausgehend vom Zustand des vorherigen Betriebspunktes. Konkret bedeutet dies, dass die

Berechnung bei der geringsten Drehzahl beginnt und die Drehzahl anschließend sukzessive erhöht wird. Nach Erreichen der Maximaldrehzahl werden die Drehzahlen in fallender Reihenfolge durchfahren. Hierbei ist zu beachten, dass der nächste Drehzahlpunkt, wie in Abschnitt 2.1.2 beschrieben, stets ruckfrei angefahren wird. Mit steigender Drehzahl versteift sich der Ölfilm aufgrund des größeren hydrodynamischen Druckaufbaus zunehmend, die Abstützungselastizität bleibt jedoch unverändert. Da Ölfilm und Abstützung eine Reihenschaltung darstellen, linearisiert sich die Gesamtlagerung mit steigender Versteifung des Ölfilms und die Gesamtsteifigkeit wird zunehmend von der Steifigkeit der umgebenden Struktur bestimmt. Dies führt zu einer Ausweitung des linearen Bereichs mit steigender Drehzahl und einer besseren Übereinstimmung von linearer und nichtlinearer Berechnung bei gleicher Zapfenamplitude. Im überkritischen Betrieb wird die Amplitude zudem vor allem durch die Selbstzentrierung des Rotors bestimmt, in der sich die Amplituden der Schwerpunktsexzentrizität annähern. Für übliche Wuchtgüten beträgt die Schwerpunktsexzentrizität nur einen Bruchteil des Lagerspiels, wodurch die Zapfenamplituden im überkritischen Betrieb gering bleiben und somit auch eine bessere Übereinstimmung von linearer und nichtlinearer Berechnung vorliegt.

Aufgrund der progressiven Steifigkeitszunahme mit steigender Auslenkung neigt sich die Resonanzüberhöhung im Diagramm nach rechts hin zu größeren Drehzahlen. Außerdem können ausgeprägte Hysterese-Effekte beobachtet werden, die zudem zu Sprüngen in der Lösung führen. Entsprechend der Anfangsbedingungen können sich in der Nähe der Resonanz zwei¹ verschiedene Lösungen mit verschiedener Amplitude einstellen. Beim Durchfahren der Resonanz von kleinen Drehzahlen hin zu großen stellt sich die Lösung mit der größeren Amplitude ein. Nach Erreichen des Amplitudenmaximums springt die Lösung auf den Lösungsast der kleineren Amplitude. Durch eine anschließende schrittweise Verringerung der Drehzahl bleibt die Lösung zunächst auf dem Lösungsast der kleineren Amplitude und springt erst bei niedrigeren Drehzahlen auf den Ast mit der größeren Amplitude. Der Verlauf der kri-

¹ In der Resonanz existiert noch eine dritte Lösung, die jedoch instabil ist [3] und deshalb mit dem angewendeten Lösungsverfahren nicht beobachtet werden kann.

tischen Drehzahl ist in Abbildung 4.4 zusammen mit den Verläufen der anderen Lagervarianten dargestellt.

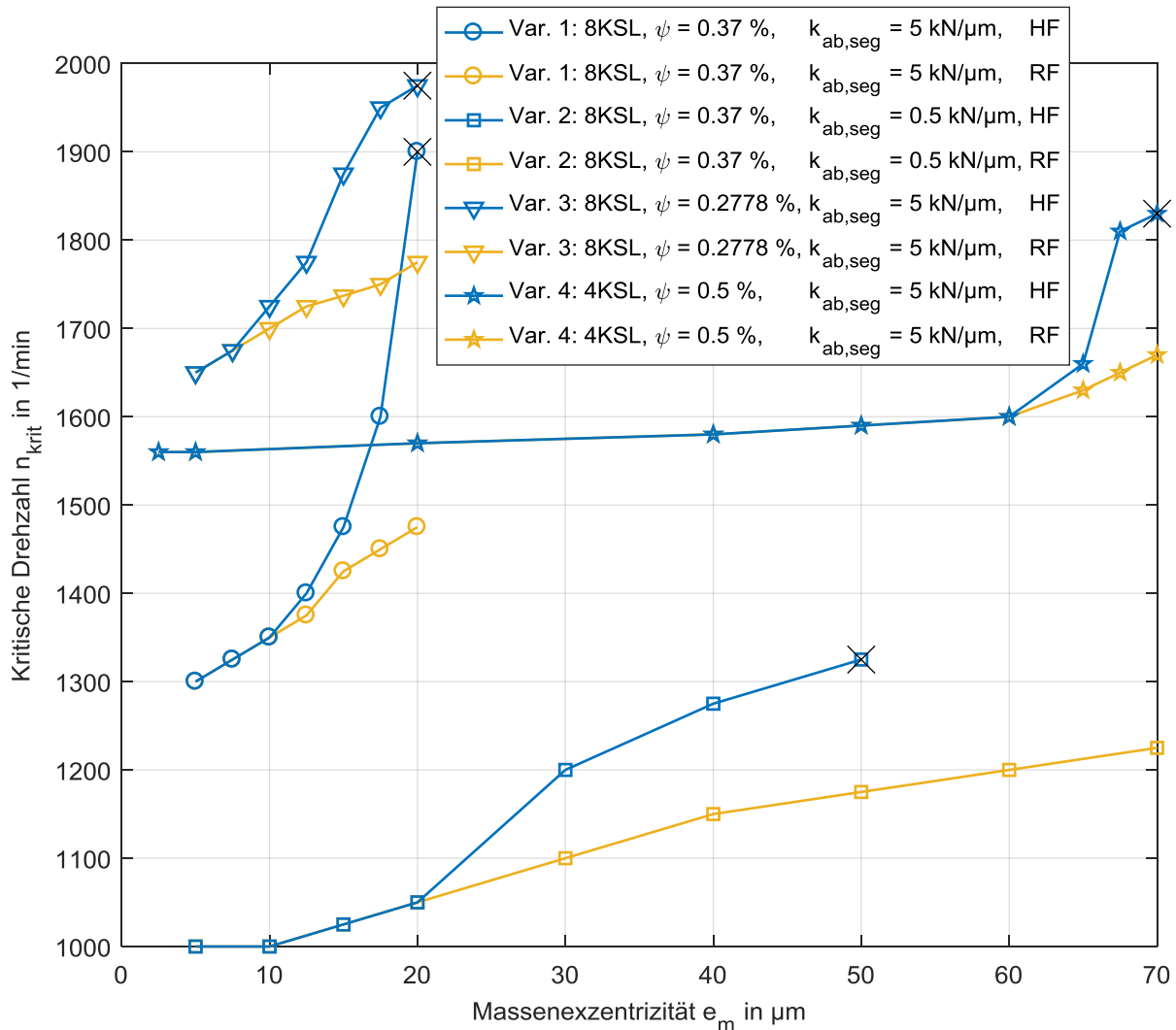


Abbildung 4.4: Kritische Drehzahlen des Lavalläufers aus Tabelle 4.1 bei verschiedenen Lagervarianten; Betriebspunkte ab denen bei weiterer Erhöhung der Massenexzentrizität die kritische Drehzahl aufgrund zu großer Amplituden nicht mehr berechnet werden kann sind mit einem X gekennzeichnet (Resonanzkatastrophe), HF: Hochfahrt, RF: Runterfahrt

Lagervariante 1 und 3 besitzen dieselbe maximal mögliche kritische Drehzahl von $n_{krit,max} = 2020 \text{ 1/min}$. Aufgrund des engeren Lagerspiels besitzt Variante 3 eine größere Schmierfilmsteifigkeit, wodurch die kritische Drehzahl auf einem höheren Niveau beginnt. In beiden Fällen stellt sich kurz vor Erreichen der maximal möglichen kritischen Drehzahl die Resonanzkatastrophe ein. Lagervariante 2 besitzt gegenüber Variante 1 eine geringere Segmentabstützungssteifigkeit, was sich in einem insgesamt geringeren Niveau der kritischen Drehzahlen äußert. Bemerkenswert ist das Verhalten der kritischen Drehzahl im Falle der 4-Kippsegmentlager Variante 4. Hier

existiert ein ausgedehnter, nahezu linearer Bereich, in dem die kritische Drehzahl nur wenig mit der Unwucht ansteigt. Erst unter Einwirkung extremer Unwuchten geht der lineare Verlauf in einen progressiven Anstieg über, der jedoch rasch in die Resonanzkatastrophe mündet. Alle Varianten verhalten sich bezüglich der maximalen Erhöhung der kritischen Drehzahl in Übereinstimmung mit der Linearisierungshypothese. Abbildung 4.5 zeigt die Zapfenbahnkurven an der Lagerstelle des 4-Kippsegmentlagers und die relative Zapfenbewegung im Lager während der Fahrt in der Resonanz bei einer Massenexzentrizität von $\epsilon_m = 30 \mu\text{m}$ und $65 \mu\text{m}$. Bei der geringeren Belastung liegen augenscheinlich noch kreisförmige Bewegungen vor. Im Falle der größeren Unwucht zeichnet sich für die relative Zapfenbewegung im Lager die Kontur der Zapfenbeweglichkeitskurve ab, wobei die Segmentabstützungen auf 12, 3, 6 und 9 Uhr liegen. Entgegen der Erwartung tritt dies bei der absoluten Zapfenbewegung nicht ein, stattdessen kann für dieses 4-Kippsegmentlager eine „acht-eckige“ Bahnkurve beobachtet werden.

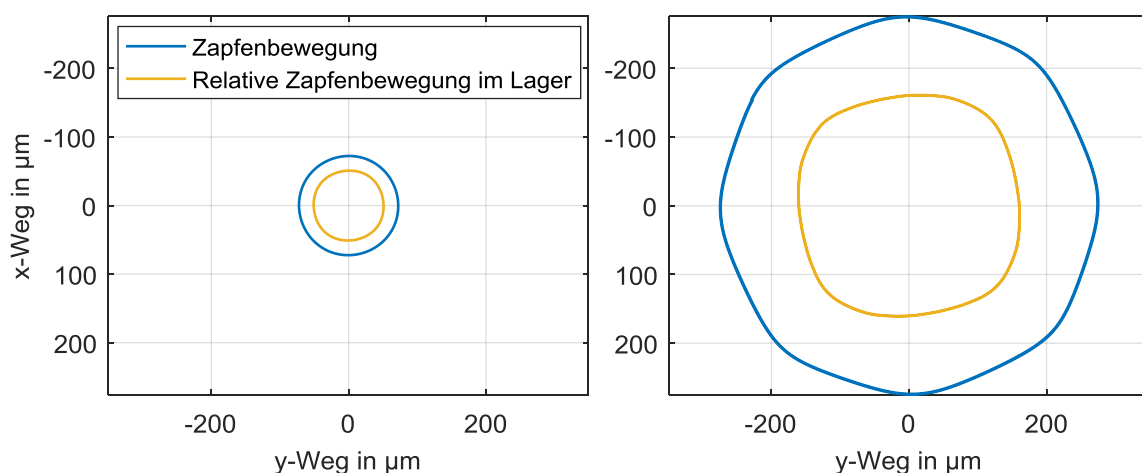


Abbildung 4.5: Zapfenbahnkurven an der Lagerstelle und relative Zapfenbahnkurve im Lager des Lavalläufers mit 4 Kippsegmentlagern im Bereich der Resonanz ($n = 1600 \text{ 1/min}$), links: Massenexzentrizität $e_m = 30 \mu\text{m}$, rechts: $e_m = 65 \mu\text{m}$

4.2.2 Einfluss der statischen Lagerlast

Aufgrund der aufgetragenen statischen Lagerlast von $p_q = 1,0 \text{ MPa}$ in x-Richtung verhalten sich die Lager anisotrop, was sich in unterschiedlichen Amplituden in x- und y-Richtung äußert. Deshalb werden die Ergebnisse für beide Raumrichtungen angegeben. Die kritischen Drehzahlen und Resonanzamplituden nach Abbildung 4.7 und die zugehörigen Amplitudengänge in Abbildung 4.6 zeigen das unterschiedliche

Verhalten beider Raumrichtungen. In Richtung der Lagerlast liegen ein steiferer Ölfilm und deshalb auch eine höhere kritische Drehzahl vor.

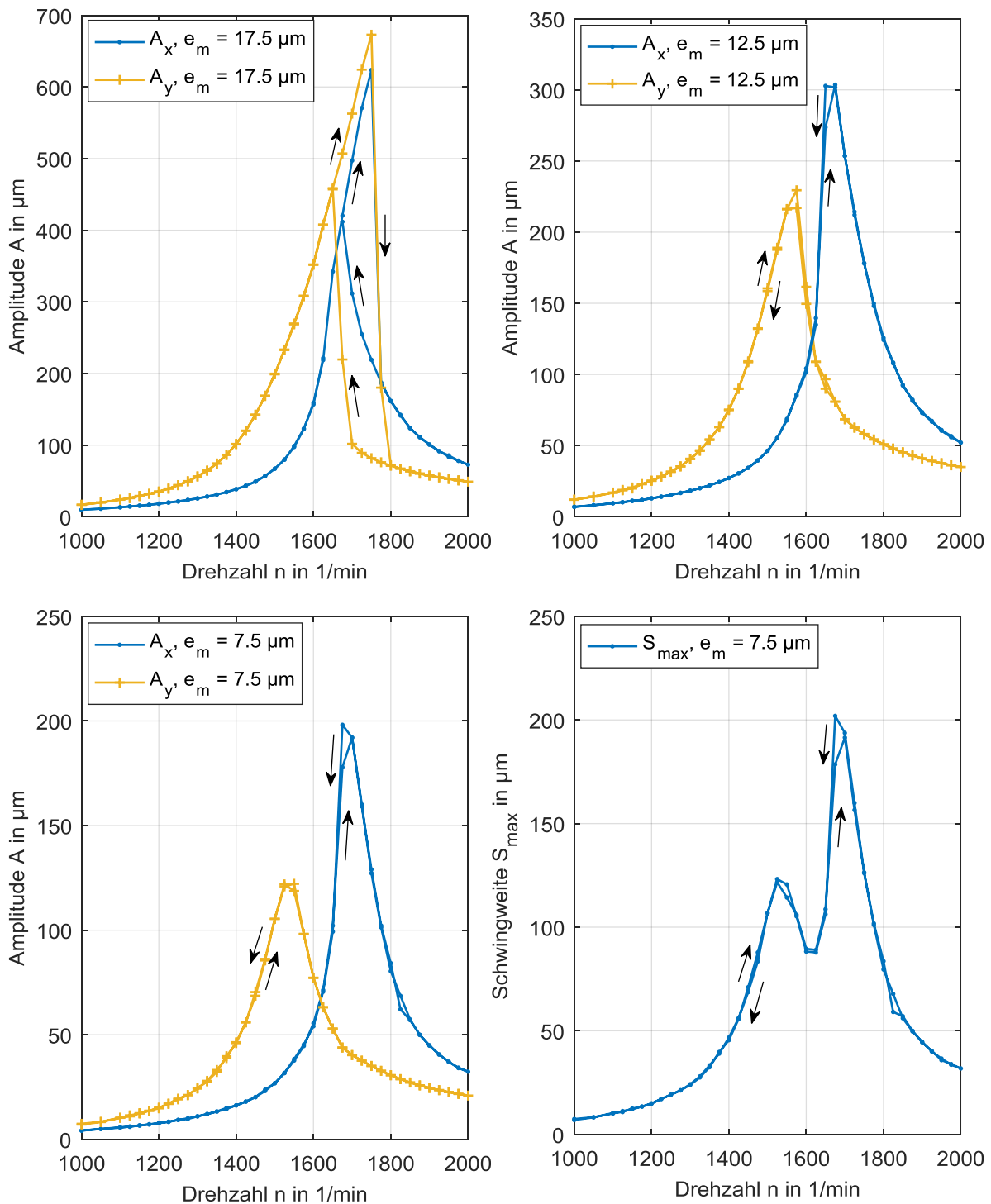


Abbildung 4.6: Amplitudengänge des Lavalläufers aus Tabelle 4.1 mit der Lagervariante 1 und statischer Lagerlast von $p_q = 1,0$ MPa für verschiedene Massen-Exzentrizitäten, (Zur besseren Lesbarkeit sind die Ordinaten nicht gleich skaliert)

Mit steigender Unwucht sinkt die kritische Drehzahl in x-Richtung zunächst leicht ab, während in y-Richtung eine Anhebung erfolgt. Während die y-Resonanz stets nach

rechts geneigt ist, kann bei geringen Unwuchten eine Neigung der x-Resonanz nach links beobachtet werden. Die Verringerung der kritischen Drehzahl in x-Richtung und die Neigung der Amplitudengänge deuten auf eine Entfestigung des Lagers mit steigender Unwucht hin. Bei weiter steigender Unwucht verliert die statische Grundlast zunehmend an Bedeutung und das Verhalten geht in das Verhalten des statisch unbelasteten Systems über. Hierdurch fallen die kritischen Drehzahlen beider Raumrichtungen wieder zusammen und die x-Resonanz neigt sich wieder nach rechts.

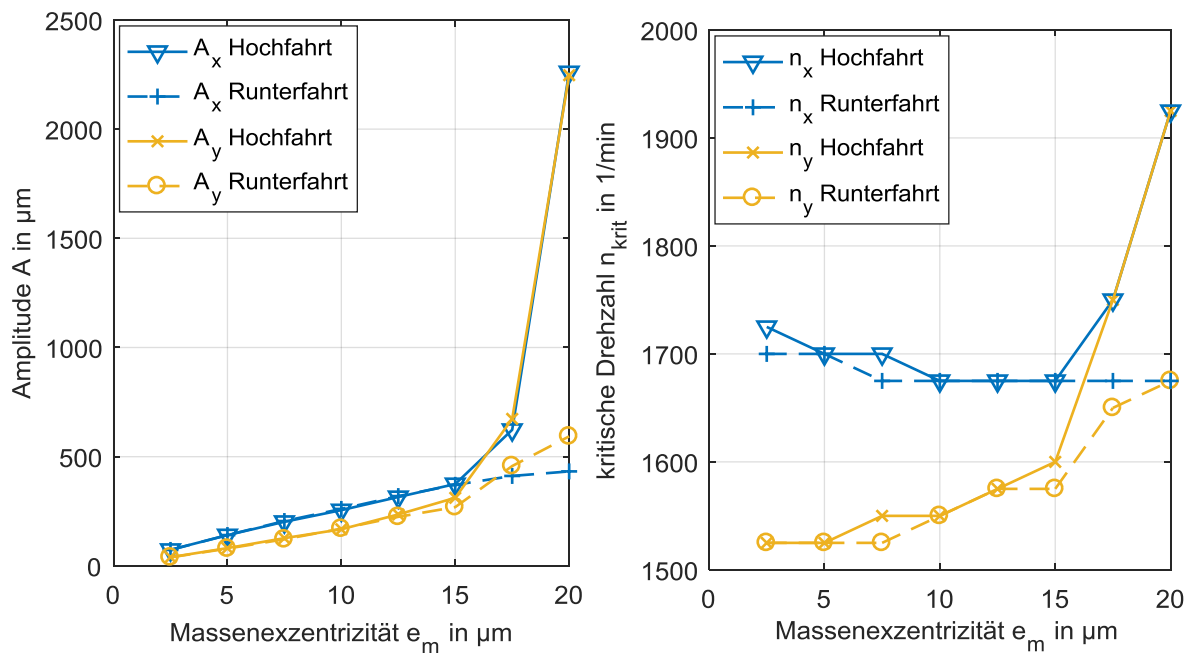


Abbildung 4.7: Rotoramplituden (links) und kritische Drehzahlen (rechts) des Lavalläufers aus Tabelle 4.1 mit der Lagervariante 1 und einer statischen Lagerlast von $p_q = 1,0 \text{ MPa}$ bei quasistationärer Hoch- und Runterfahrt durch die Resonanz (Die Drehzauflösung beträgt $\Delta n = 25 \text{ 1/min}$)

4.2.3 Einfluss des Druckanstiegs am Segmentbeginn und der mechanischen Segmentaufbiegung

Die erweiterte Lagermodellierung berücksichtigt näherungsweise den Druckanstieg am Segmentbeginn, sowie die mechanische Aufbiegung der Segmente. Der Druckaufbau am Segmentbeginn wird nach dem in Abschnitt 2.3.10 erläuterten Vorgehen im volldynamischen Kippsegmentlager-Modell berücksichtigt. Der Druckanstieg wird hierbei in jedem Zeitschritt entsprechend der aktuellen Strömungsverhältnisse und Segmentstellungen bestimmt. Die Untersuchung erfolgt am Lavalläufer aus Tabelle 4.1 mit der Lagervariante 1. Abbildung 4.8 zeigt zunächst den Zusammenhang der statischen Lagerkraft mit der relativen Zapfenexzentrizität für verschiedene Drehzahlen. Bei geringen Drehzahlen existiert praktisch keine Auswirkung des Druckanstiegs

am Segmentbeginn auf die Lagerkraft. Ab einer Drehzahl von ungefähr $n = 1000$ 1/min stellt sich jedoch bei gleichbleibender Lagerkraft eine geringere Exzentrizität ein, was mit einer Versteifung des Lagers gleichgesetzt werden kann.

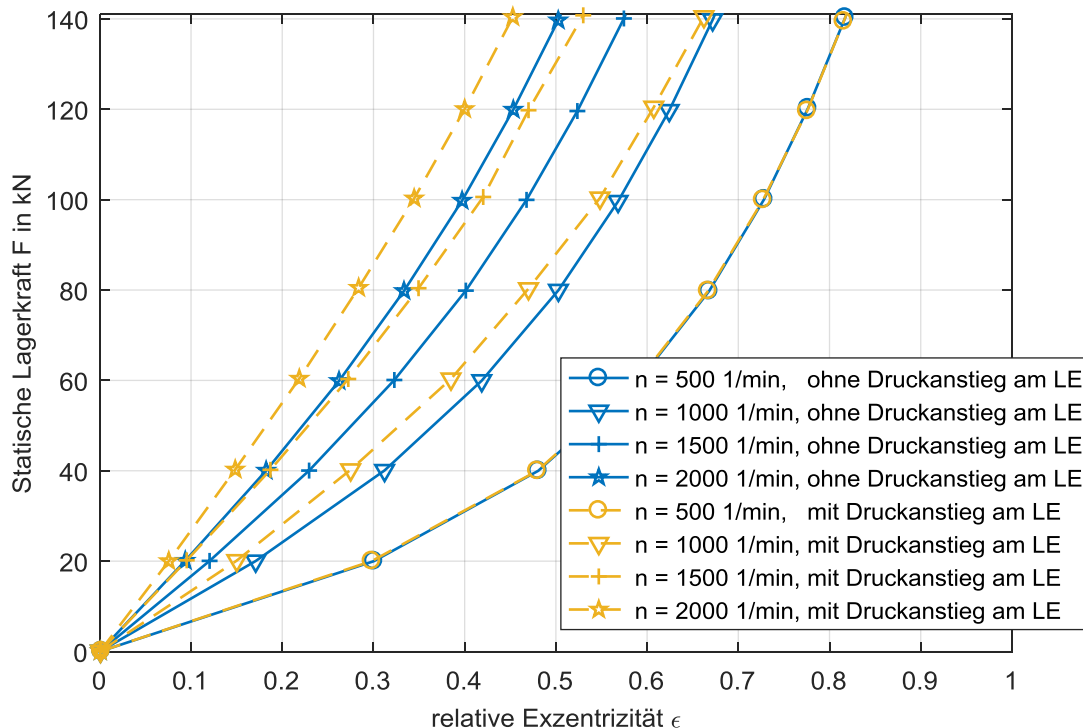


Abbildung 4.8: Zusammenhang von statischer Lagerkraft und relativer Exzentrizität eines 8-Kippsegmentlagers bei verschiedenen Drehzahlen n , Einfluss des Druckanstiegs am Segmentbeginn (LE – Leading Edge), berechnet mit COMBROS R [75]

Dieser Effekt ist zum einen auf die stärkere Anstellung der Segmente und zum anderen auf das unterschiedlich stark erhöhte Druckniveau der belasteten und unbelasteten Segmente zurückzuführen. Abbildung 4.9 stellt hierfür die Spalthöhe und den Druckverlauf in der axialen Lagermitte dar. An den belasteten Segmenten existiert ein größerer Druckanstieg, da kleinere Eintrittsspalthöhen als an den unbelasteten Segmenten vorliegen. Es ist deutlich zu erkennen, dass die unterschiedlich starke Druckerhöhung am Segmentbeginn zu einer Tragkraftsteigerung und somit zu einer Versteifung des Lagers führen muss.

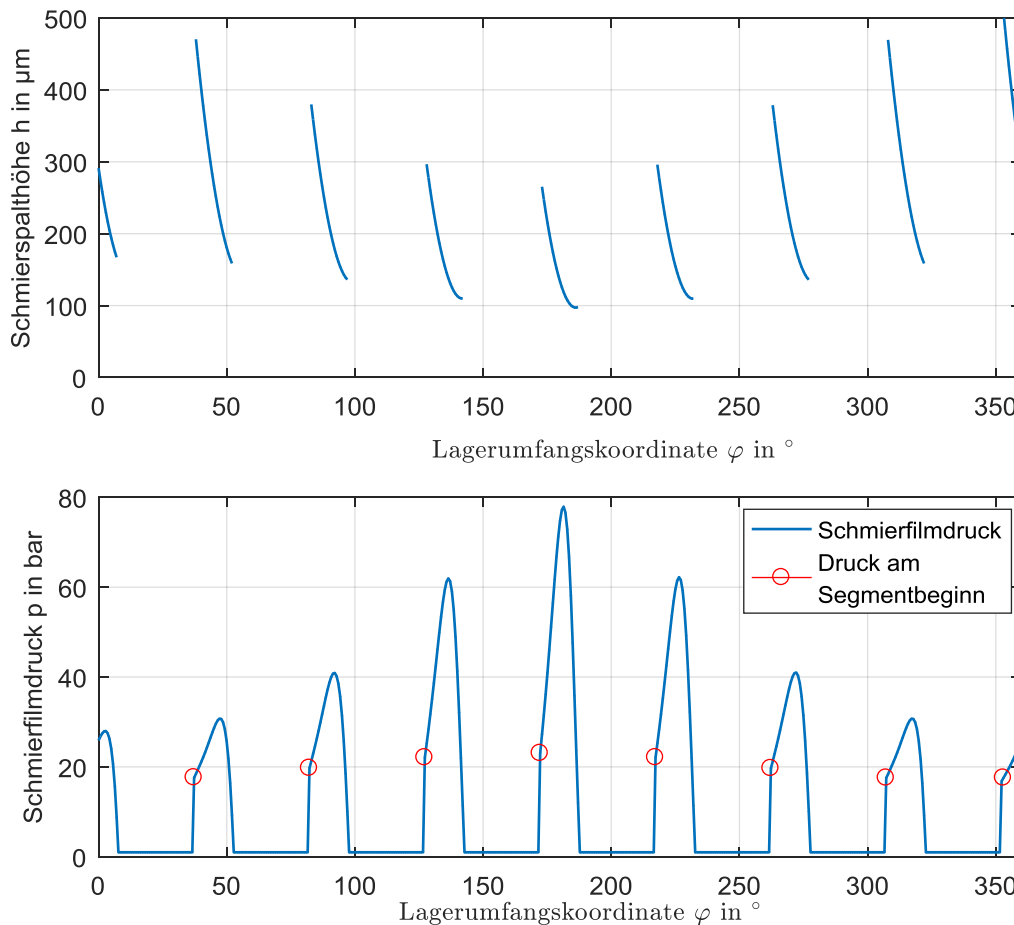


Abbildung 4.9: Schmierpalthöhe und -druck in der axialen Lagermitte des 8-Kippsegmentlagers für den Betriebspunkt $n = 1500 \text{ 1/min}$, $F = 100 \text{ kN}$, unter Berücksichtigung des Druckaufbaus am Segmentbeginn, berechnet mit COMBROS R [75]

Abbildung 4.10 beinhaltet die Amplitudengänge des Lavalläufers mit 8-Kippsegmentlagern (Lagervariante 1 aus Tabelle 4.1) für zwei Unwuchtexzentrizitäten, wobei jeweils der Amplitudengang unter Berücksichtigung des Druckaufbaus am Segmentbeginn und unter Vernachlässigung desselben dargestellt ist. Zusätzlich wird der Einfluss der mechanischen Segmentverformung gezeigt. Im stark unterkritischen Bereich ist zunächst keine Auswirkung auf den Amplitudengang festzustellen. Die Lagersteifigkeit steigt ab Drehzahlen von $n > 800 \text{ 1/min}$ aufgrund des quadratischen Zusammenhangs von Druckanstieg und Drehzahl so stark an, dass die Amplituden wesentlich langsamer ansteigen. Die kritische Drehzahl erfährt durch die Lagerversteifung eine deutliche Anhebung. Der Einfluss der mechanischen Segmentaufbiegung ist hingegen vernachlässigbar.

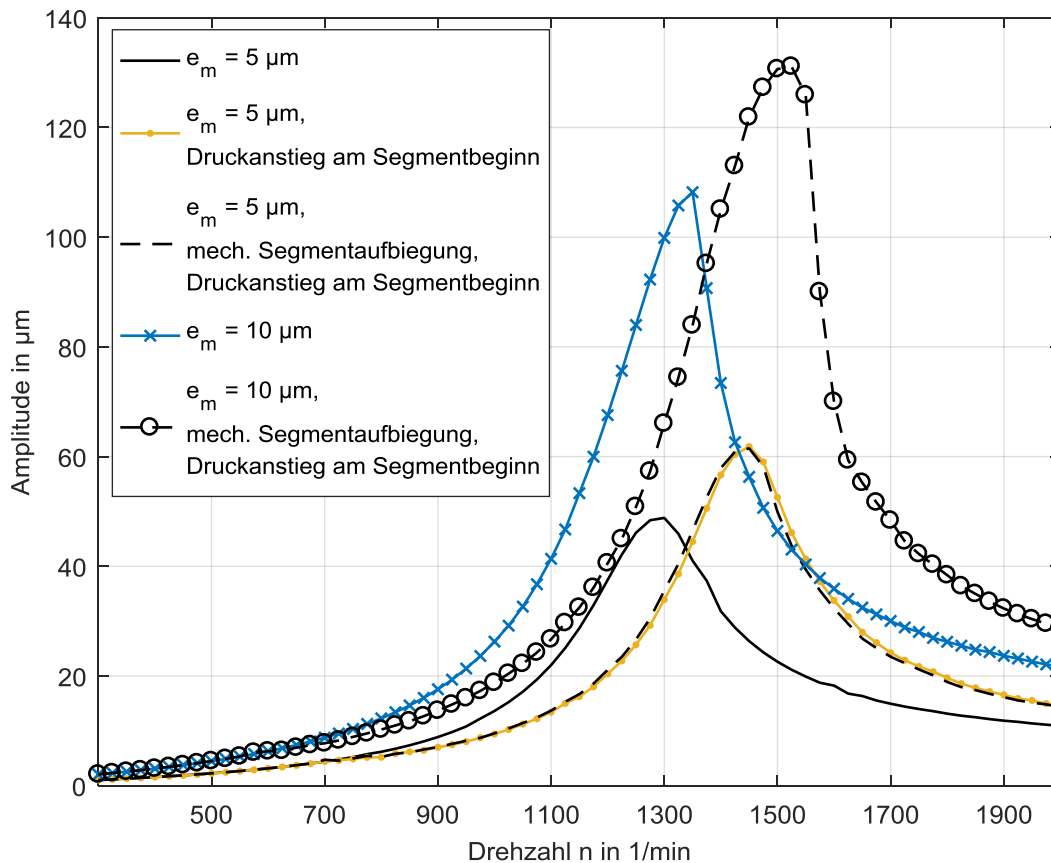


Abbildung 4.10: Einfluss des Druckaufbaus am Segmentbeginn und der mechanischen Segmentverformung auf den Amplitudengang des Lavalläufers in 8-Kippsegmentlagern

Der Einfluss der erweiterten Lagermodellierung wird außerdem am Lavalläufer in 4-Kippsegmentlagern studiert. Hierzu vergleicht Abbildung 4.11 die Amplitudengänge mit und ohne Berücksichtigung der Segmentaufbiegung, sowie unter Berücksichtigung des Druckanstiegs am Segmentbeginn. Die mechanische Segmentaufbiegung führt zu einer Amplitudenerhöhung und einer geringen Absenkung der kritischen Drehzahl, was auf eine Reduzierung der Steifigkeit und der Systemdämpfung hindeutet. Das Auswerten des Amplitudengangs ergibt eine Reduktion der Dämpfung um ca. $\Delta D = 3\%$. Im Gegensatz dazu bewirkt der Druckanstieg am Segmentbeginn eine geringe Anhebung der kritischen Drehzahl mit gleichzeitiger Amplitudenerhöhung. Die Einflüsse auf die kritische Drehzahl heben sich, in diesem Fall, bei gleichzeitiger Berücksichtigung beider Effekte gegenseitig auf und es kann keine Verschiebung der kritischen Drehzahl festgestellt werden. Wie beim Modell ohne Druckanstieg am Segmentbeginn und ohne elastische Segmentaufbiegung reagiert der Rotor bei einer Unwuchterhöhung von $e_m = 10\ \mu\text{m}$ auf $e_m = 20\ \mu\text{m}$ nur wenig mit einer Änderung der kritischen Drehzahl.

Aufgrund der längeren Segmente des 4-Kippsegmentlagers ist der Einfluss der Segmentaufbiegung stärker als beim 8-Kippsegmentlager.

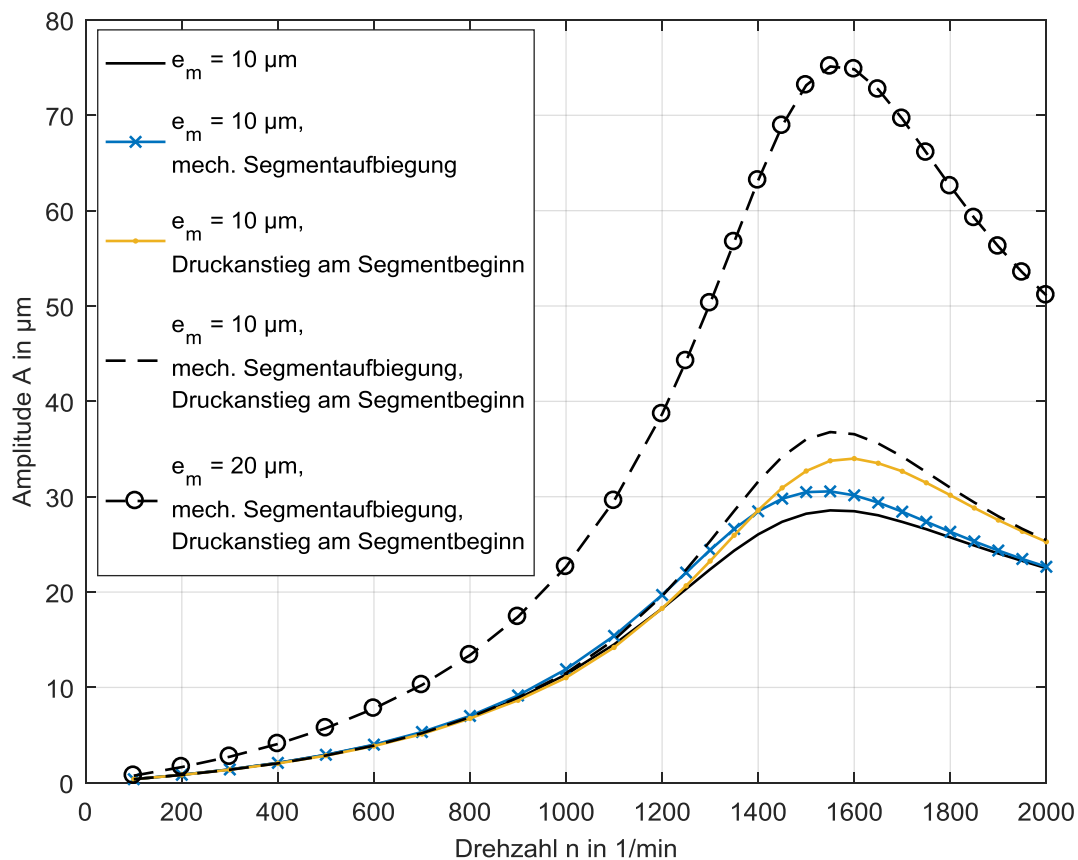


Abbildung 4.11: Einfluss des Druckaufbaus am Segmentbeginn und der elastischen Segmentaufbiegung auf den Amplitudengang des Lavalläufers in 4-Kippsegmentlagern

Zur Verifizierung des Modells für den Druckanstieg auf die Dynamik des Lagers sollten weitere Untersuchungen erfolgen, da Abhängigkeiten von weiteren Parametern, wie z. B. der konstruktiven Gestaltung der Einlaufkante, existieren. Zurzeit ist es noch nicht möglich, den Druckaufbau in der Störungsrechnung vollständig zu berücksichtigen. In den Störungsgleichungen wird zwar die veränderte Segmentstellung berücksichtigt, jedoch müsste die Änderung des Druckanstiegs am Segmentbeginn aufgrund der Segmentbewegung als Randbedingung vorgegeben werden.

4.3 Variationsrechnungen am Lavalläufer in Festsegmentlagern

Zur Untersuchung des Verhaltens eines Systems mit Festsegmentradialgleitlagern wird ein vertikaler Lavalläufer definiert, der in seinen dynamischen Eigenschaften weitestgehend der Pumpenwelle aus Abschnitt 6.3 entspricht. Es liegt somit ein realitätsnahes Beispielsystem vor, dessen Rotor- und Lagerdaten in Tabelle 4.2 zusam-

mengefasst sind. Als Lagervarianten werden zwei kreiszylindrische- und ein profiliertes Vierflächenlager untersucht. Die kreiszylindrischen Lager unterscheiden sich in ihrem Lagerspiel, wobei das kleinere Lagerspiel zwei Drittel des größeren Lagerspiels beträgt. Das Lagerspiel des Vierflächenlagers entspricht dem des kreiszylindrischen Lagers mit dem kleineren Lagerspiel.

Tabelle 4.2: Rotor- und Lagerdaten des Lavalläufers mit Festsegmentradiallagern

Rotor			
Gesamtmasse m_{ges} in kg	≈ 26000		
Rotormasse m_r in kg	16500		
Lagerabstand l_{la} in mm	≈ 5600		
Betriebsdrehzahl in 1/min	750		
Auswuchtgütestufe G in mm/s	6,3		
Zulässige Massenexzentrizität in μm bei Nenndrehzahl	80		
Lager	KZL 1	KZL 2	4FL
Relatives Lagerspiel ψ in ‰	0,86	1,29	0,86
Lagerspiel ΔR in μm	232	348	232
Profilierung ψ_p	1	1	2
Durchmesser D in mm	540		
Breite B in mm	422		
Segmentumschließungswinkel in °	72		
Lager-Abstützungssteifigkeit $k_{ab,lr}$ in kN/ μm	3,89		
Dynamische Viskosität η in mPas	23		

Abbildung 4.12 zeigt die Amplitudengangdiagramme der relativen Lagerschwingungen und der absoluten Rotorschwingungen des Lavalläufers mit kreiszylindrischen Lagern (KZL 1) für verschiedene Schwerpunktsexzentrizitäten und statische Lagerlasten. Die nichtlineare Lösung erfolgt nach dem instationären Elrod-Algorithmus und die lineare Lösung mit dem KC-Modell und den Koeffizienten des Lagerzentrums. Anders als beim Kippsegmentlager existiert im untersuchten Drehzahlbereich eine Stabilitätsgrenze, die sich im statisch unbelasteten Fall mit steigender Unwucht zu größeren Drehzahlen verschiebt. Eine Erhöhung der statischen Lagerlast führt ebenfalls zu einer Anhebung der Stabilitätsgrenze. Die kritische Drehzahl liegt im Gegensatz zum Kippsegmentlager, wenn auch nur geringfügig, unter der linear berechneten.

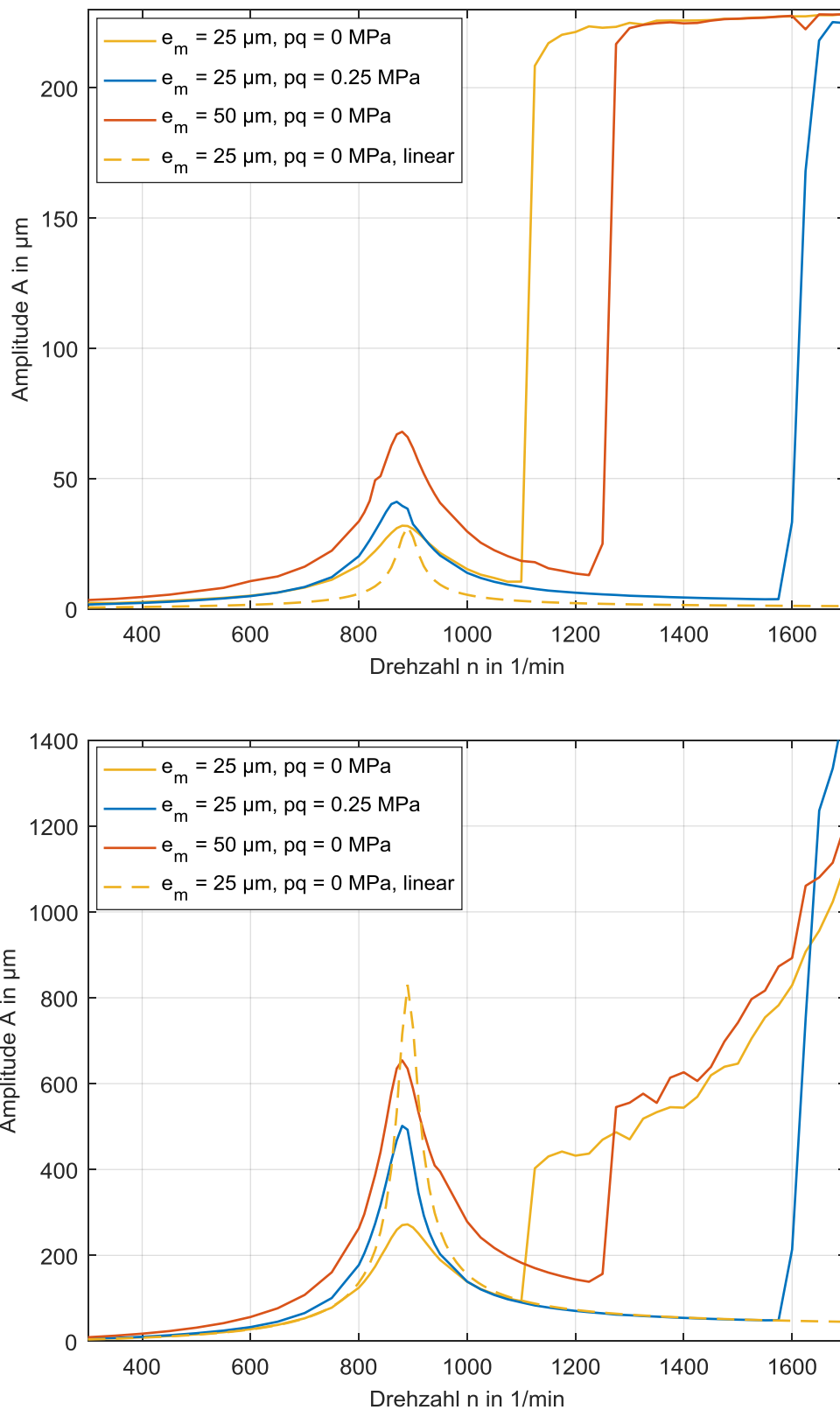


Abbildung 4.12: Amplitudengang-Diagramm des Lavalläufers aus Tabelle 4.2 in kreiszy-
lindrischen Lagern (KZL 1) für verschiedene Massen-Exzentrizitäten und
statische Lasten. Oben: relative Lagerschwingungsamplituden, Unten:
Rotorschwingungsamplituden

Abbildung 4.13 beinhaltet die Stabilitätsgrenzen, kritischen Drehzahlen und Resonanzamplituden für weitere Massenexzentrizitäten und statische Grundlasten. Aufgrund der sehr weichen Wellensteifigkeit liegt nur eine geringe Abhängigkeit der kritischen Drehzahl von der Massenexzentrizität vor, die praktisch vernachlässigbar ist. Bei fehlender statischer Grundlast steigt die Stabilitätsgrenze degressiv mit zunehmender Unwucht an. Genauso steigt die Stabilitätsgrenze mit zunehmender statischer Last degressiv an.

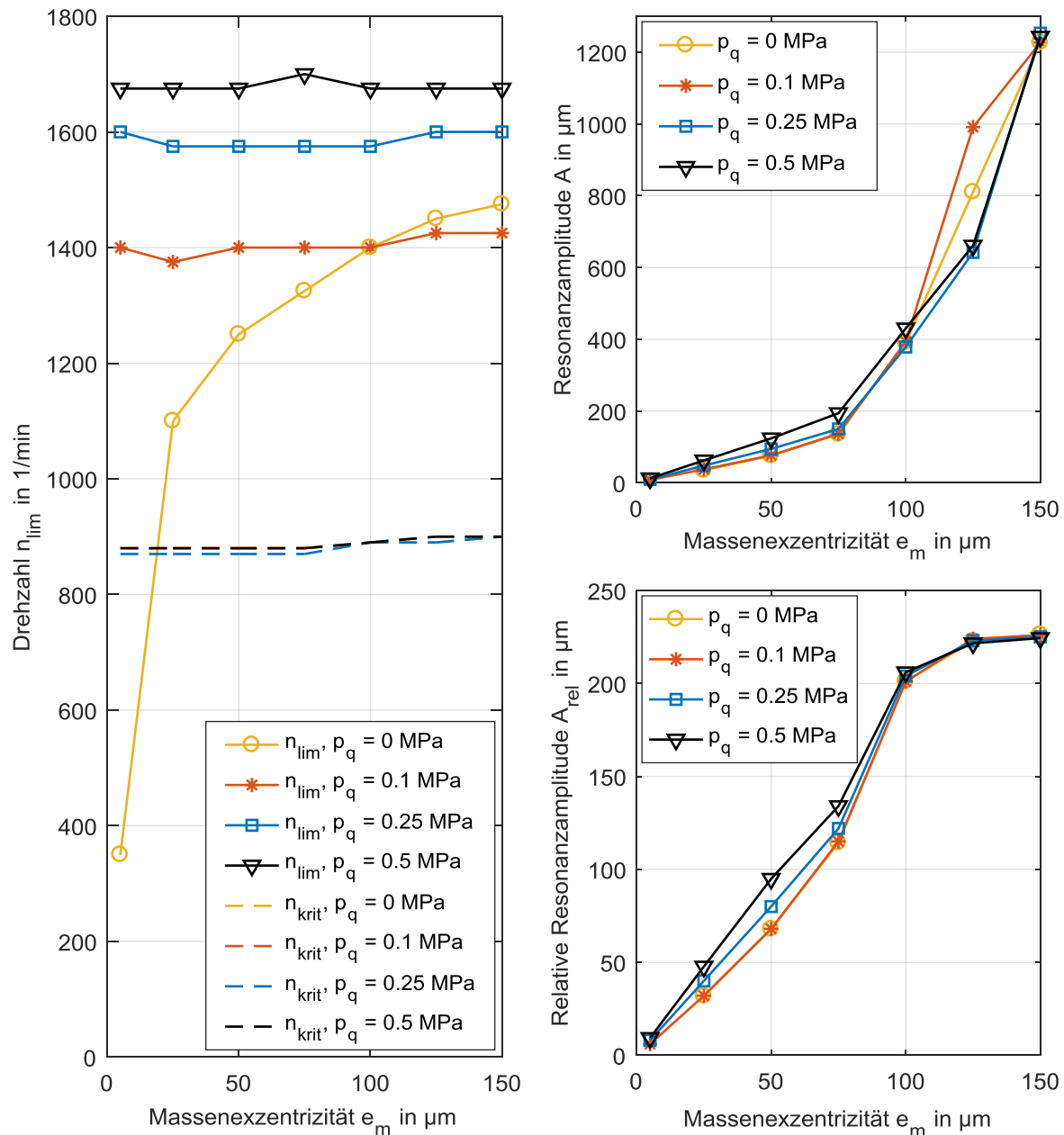


Abbildung 4.13: Links: Kritische Drehzahl n_{krit} und Stabilitätsgrenzdrehzahl n_{lim} , Rechts: Resonanzamplitude (Rotor) und rel. Resonanzamplitude (Lager) in Abhängigkeit der statischen Last p_q und der Massenexzentrizität e_m , (Lavalläufer Tabelle 4.2 (KZL 1))

Der unwuchtfreie, statisch unbelastete Rotor ist praktisch für alle Drehzahlen instabil. Bereits geringe statische Lasten oder Unwuchten ermöglichen den stabilen Lauf. Bei großen Unwuchten kann sich der stabilisierende Effekt der Unwucht jedoch umkehren, so dass das Aufbringen einer statischen Last mit einer Herabsetzung der Stabilitätsgrenze einhergeht. Bei den Resonanzamplituden existiert zunächst ein linearer Bereich für den Zusammenhang mit der Unwucht. Anschließend folgen ein degressiver Verlauf für die relativen Lageramplituden und ein progressiver Verlauf für die absoluten Schwingungen. Im linearen Bereich führt die Erhöhung der statischen Last zu einer Amplitudenzunahme. Durch den Einsatz der Vierflächenlager ändert sich das Systemverhalten wie in Abbildung 4.14 dargestellt.

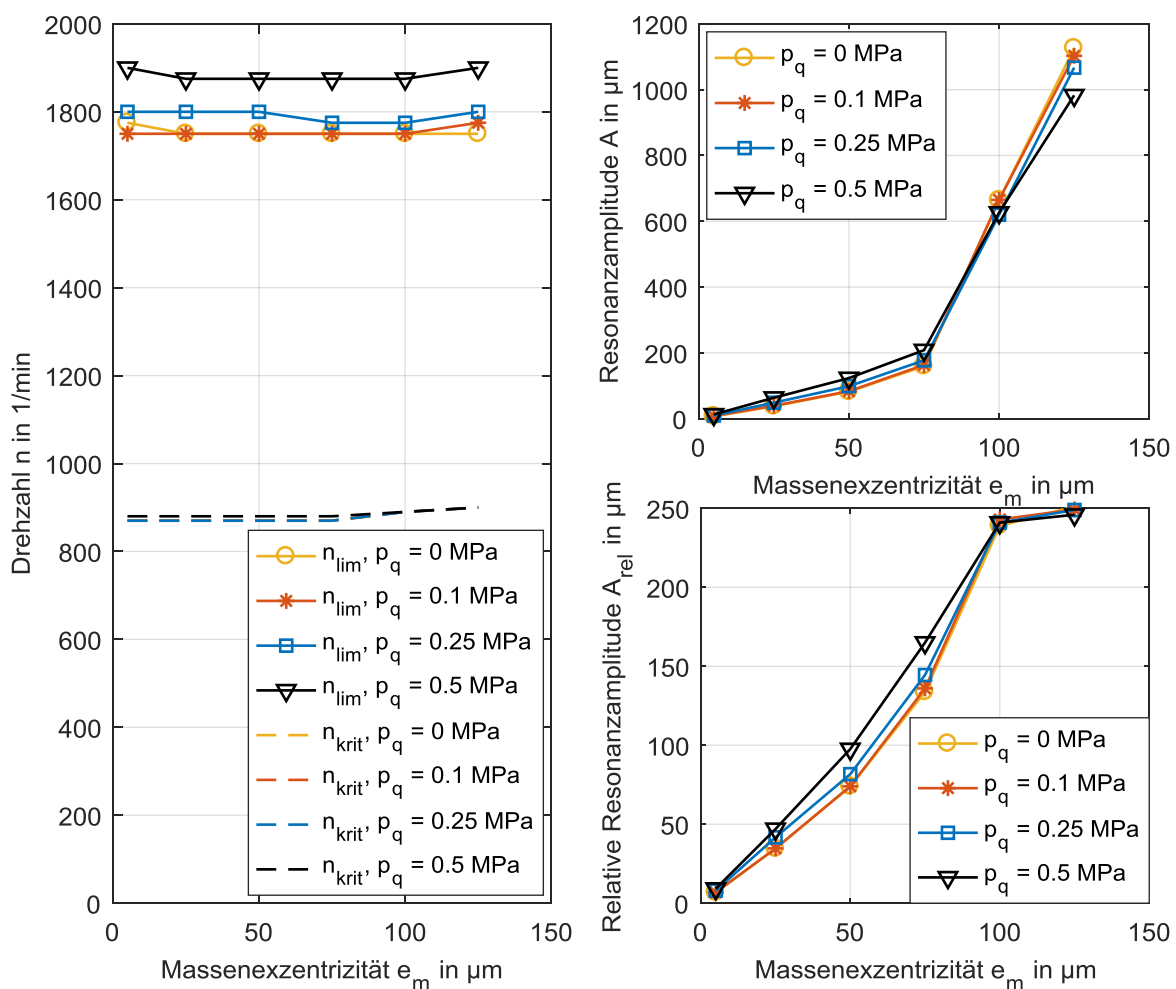


Abbildung 4.14: Links: Kritische Drehzahl n_{krit} und Stabilitätsgrenzdrehzahl n_{lim} , Rechts: Resonanzamplitude (Rotor) und rel. Resonanzamplitude (Lager) in Abhängigkeit der statischen Last p_q und der Massenexzentrizität e_m , (Lavalläufer aus Tabelle 4.2 (4FL))

Prinzipiell verhält sich das System ähnlich, jedoch verschwindet die starke Abhängigkeit der Stabilitätsgrenze von der Unwucht und es ist auch im unwuchtfreien und

statisch unbelasteten Fall ein stabiler Betrieb möglich. Insgesamt liegt die kritische Drehzahl höher als beim kreiszylindrischen Lager. Die Resonanzdrehzahl und die Amplituden ändern sich nur wenig. Bei extremen Unwuchten können die relativen Lageramplituden sogar größer als das Kleinstspiel des Lagers werden.

Bei der Variante des kreiszylindrischen Lagers mit dem größeren Lagerspiel kann sich bei größeren Unwuchten, wie beim Kippsegmentlager, ein Sprungphänomen beim Durchfahren der Resonanz einstellen. Hierzu zeigt Abbildung 4.15 den Amplitudengang bei Hochfahrt und Runterfahrt durch die Resonanz für zwei verschiedene Unwuchten. Während bei der geringeren Unwucht die Amplituden der Hoch- und Runterfahrt übereinstimmen, existieren bei der größeren Unwucht eine Hysterese und ein sprunghafter Übergang beim Wechsel der Lösungsäste. Durch die Vergrößerung des Lagerspiels erfolgt außerdem eine Herabsetzung der Stabilitätsgrenze.

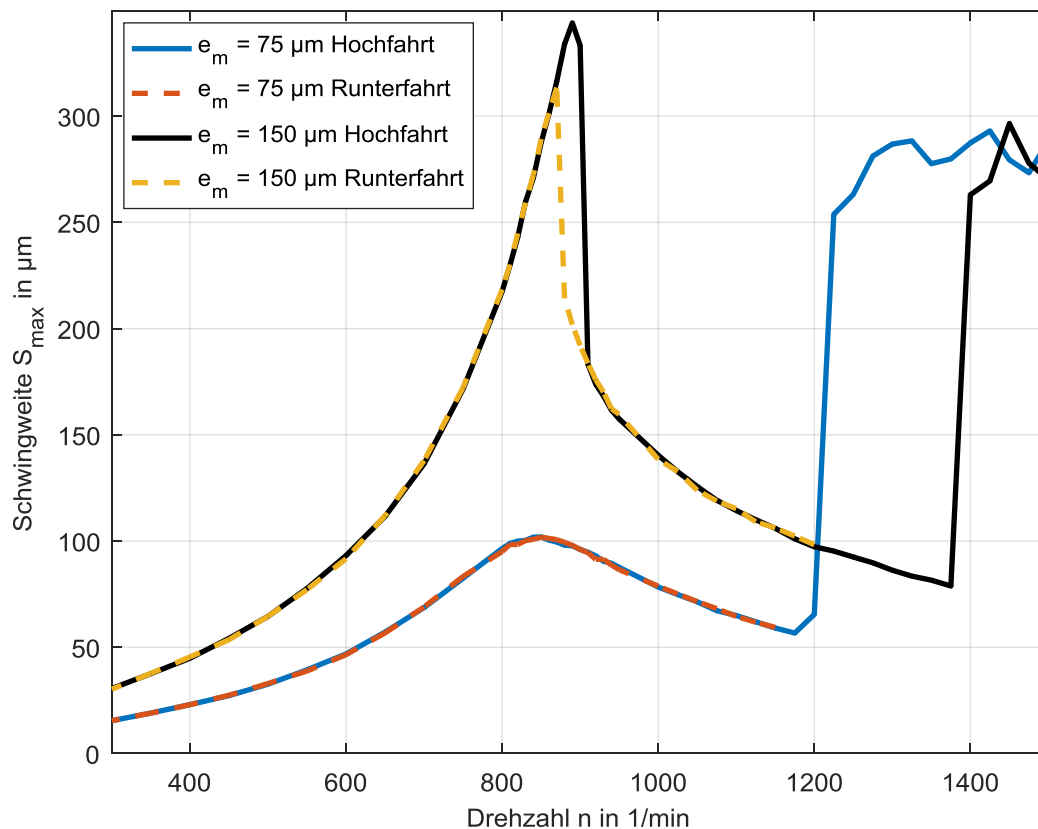


Abbildung 4.15: Amplitudengang der relativen Lagerschwingungen des Lavalläufers aus Tabelle 4.2 in kreiszylindrischen Lagern (KZL 2)

5. Näherungsverfahren

5.1 Näherungsverfahren für Festsegmentlager

5.1.1 Beschreibung des Verfahrens

Das Verfahren zur Approximation der nichtlinearen Lagerrückstellkräfte wurde im FVV-Projekt *Nichtlineare Rotordynamik* (Nr. 437) [17] entwickelt und verifiziert. Zur Beschreibung der Lagerkräfte wird die erweiterte und verallgemeinerte Reynolds'sche Differenzialgleichung herangezogen:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{H^3}{12\eta_p^* K_x} \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{H^3}{12\eta_p^* K_z} \frac{\partial \Pi}{\partial \bar{z}} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\rho^* f_c H) + \frac{\partial}{\partial \tau} (\rho^* H) \quad (5.1)$$

Die Tragkraft wird in zwei Anteile aufgespalten, wobei der erste der Tragkraft bei reiner Drehung des Wellenzapfens entspricht und der zweite den Kraftaufbau infolge einer instationären Zapfen-Bewegung beschreibt. Hierfür wird zunächst die stationäre Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{H^3}{12\eta_p^* K_x} \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{H^3}{12\eta_p^* K_z} \frac{\partial \Pi}{\partial \bar{z}} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\rho^* f_c H) \quad (5.2)$$

gelöst und das Kavitationsgebiet bestimmt. Im zweiten Schritt erfolgt die Lösung der instationären Gleichung unter der Annahme, dass sich das Kavitationsgebiet nicht ändert:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{H^3}{12\eta_p^* K_x} \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{H^3}{12\eta_p^* K_z} \frac{\partial \Pi}{\partial \bar{z}} \right) = \frac{\partial}{\partial \tau} (\rho^* H) \quad (5.3)$$

Gleichung (5.3) wird nicht direkt gelöst, sondern mit Hilfe einer Störungsrechnung mit vier Dämpfungskoeffizienten beschrieben. Die Gesamttragkraft ergibt sich durch Superposition beider Anteile. Das Verfahren ist als Kennfeldverfahren anwendbar, so dass diese Anteile in dimensionsloser Form tabelliert werden können und mit dem aktuellen, effektiven Lagerspiel und der Viskosität die dimensionsbehaftete Tragkraft während der instationären Berechnung ermittelt werden kann. In Abbildung 5.1 ist der Ablauf zur Bestimmung der Lagerrückstellkräfte grafisch dargestellt.

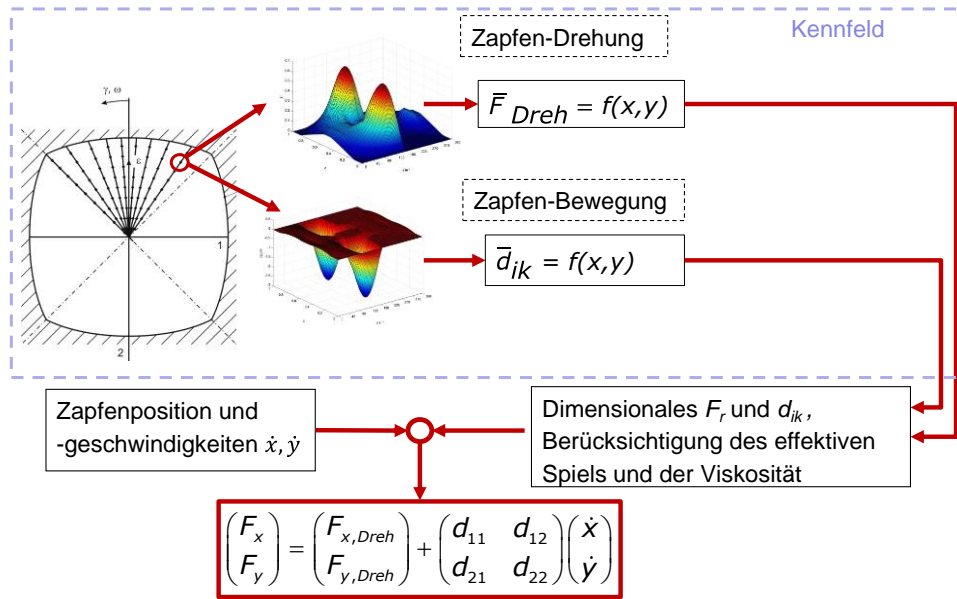


Abbildung 5.1: Approximation der nichtlinearen Lagerkräfte nach dem als Kennfeldverfahren ausgeführten Näherungsverfahren

Eine Erweiterung dieses Verfahrens zur Berücksichtigung von Verkantungseffekten erfolgt durch die Anwendung einer erweiterten Störungsrechnung, was auf einen Satz von 20 weiteren Koeffizienten führt [96]. Die Tragkraft und das Kippmoment des Lagers kann nach Gleichung (5.4) in Abhängigkeit der Zapfenposition (x, y) und des Zapfenkippwinkels (α_x, α_y), sowie deren zeitlichen Ableitungen bestimmt werden. Da die Kräfte und Momente der Zapfenrotation mit der lateralen Zapfenposition in jedem Zeitschritt aktualisiert werden, sind die Anteile der entsprechenden Einträge der Steifigkeitsmatrix bereits berücksichtigt und müssen deshalb zu Null gesetzt werden. Die Störungsgleichungen zur Bestimmung der Verkantungskoeffizienten können aus [95] entnommen werden.

$$F(x) = F_D(x, y) + k(x, y)x + d(x, y)\dot{x}$$

$$F = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ M_x \\ M_y \end{pmatrix}, \quad F_D = \begin{pmatrix} F_{Dx} \\ F_{Dy} \\ M_{Dx} \\ M_{Dy} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \alpha_x \\ \alpha_y \end{pmatrix}, \quad \dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\alpha}_x \\ \dot{\alpha}_y \end{pmatrix}, \quad (5.4)$$

$$k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & k_{x\alpha_x} & k_{x\alpha_y} \\ 0 & 0 & k_{y\alpha_x} & k_{y\alpha_y} \\ 0 & 0 & k_{\alpha_x\alpha_x} & k_{\alpha_x\alpha_y} \\ 0 & 0 & k_{\alpha_y\alpha_x} & k_{\alpha_y\alpha_y} \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} d_{xx} & d_{xy} & d_{x\alpha_x} & d_{x\alpha_y} \\ d_{yx} & d_{yy} & d_{y\alpha_x} & d_{y\alpha_y} \\ d_{\alpha_x x} & d_{\alpha_x y} & d_{\alpha_x\alpha_x} & d_{\alpha_x\alpha_y} \\ d_{\alpha_y y} & d_{\alpha_y y} & d_{\alpha_y\alpha_x} & d_{\alpha_y\alpha_y} \end{bmatrix}.$$

Hierdurch existiert eine näherungsweise Erfassung der Änderungen der Kippmomente und Tragkräfte des Schmierfilms infolge einer dynamischen Verkantung, bzw. Verlagerung. Automatisierte Routinen erstellen die erweiterten Kennfelder unter Berücksichtigung der neuen Koeffizienten. Das erweiterte Näherungsverfahren verarbeitet diese hinsichtlich der Interpolation und Bildung der resultierenden Kräfte und Momente. Abbildung 5.2 zeigt den Vergleich des Näherungsverfahrens mit der direkten Lösung der Reynolds'schen Differenzialgleichung im verkanteten Zustand für ein Vierflächenlager. Da die Koeffizienten für verschiedene Verlagerungen, jedoch immer für das unverkantete Lager berechnet werden, erfolgt die Approximation des Kippmomentes linear im Kippwinkel und nichtlinear in der Verlagerung.

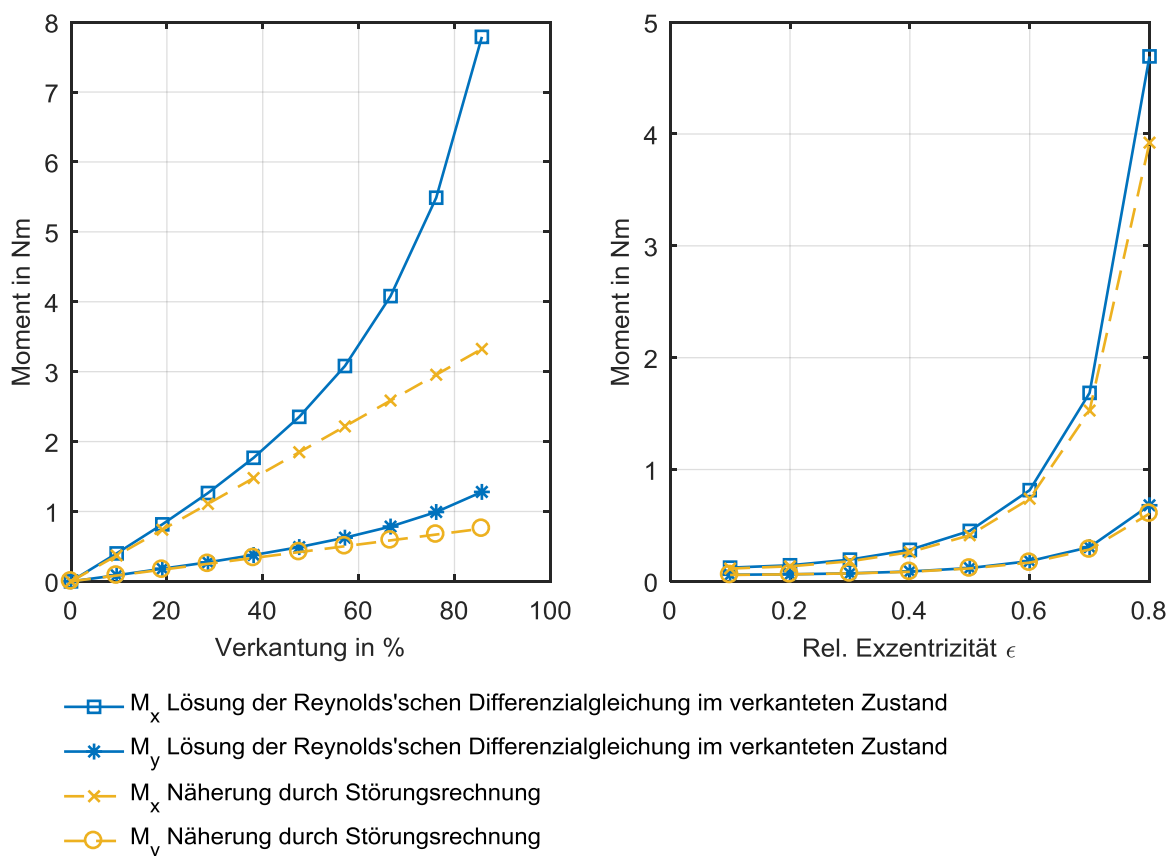


Abbildung 5.2: Kippmomente eines Vierflächenlagers für verschiedene Verkantungen und Exzentrizitäten. Vergleich der Approximation durch die Koeffizienten einer Störungsrechnung und der direkten Lösung der Reynolds'schen Differenzialgleichung mit verkanteter Spaltfunktion. Links: Konstante Exzentrizität von $\epsilon = 0,6$ in der Lagermitte und Variation des Kippwinkels. Rechts: Konstante Verkantung von $v = 20$ % und Variation der Exzentrizität. (Verkantung $v = 100$ % bedeutet Kontakt am Lagerrand)

Als Testsystem zur Verifizierung des erweiterten Verfahrens bei instationärer Tragkraft dient ein in einem Vierflächenlager gelagerter Einmassenrotor mit Unwucht. Am Zapfen greift ein äußeres Drehmoment von $M_y = 2$ Nm und eine äußere Last von

$F_x = 1000 \text{ N}$ an, die zu einer spezifischen Lagerbelastung von $\bar{p} = 0,55 \text{ MPa}$ führt. Da der Rotor in nur einem Lager gelagert ist, muss dieses das gesamte Drehmoment aufnehmen. Abbildung 5.3 zeigt die Bahnkurven des Zapfens in der Lagermitte und einem Lagerrand für die Lösung nach dem Näherungsverfahren und die Lösung auf Basis des instationären Elrod-Algorithmus. Das Näherungsverfahren bildet die Verkantung mit guter Genauigkeit ab.

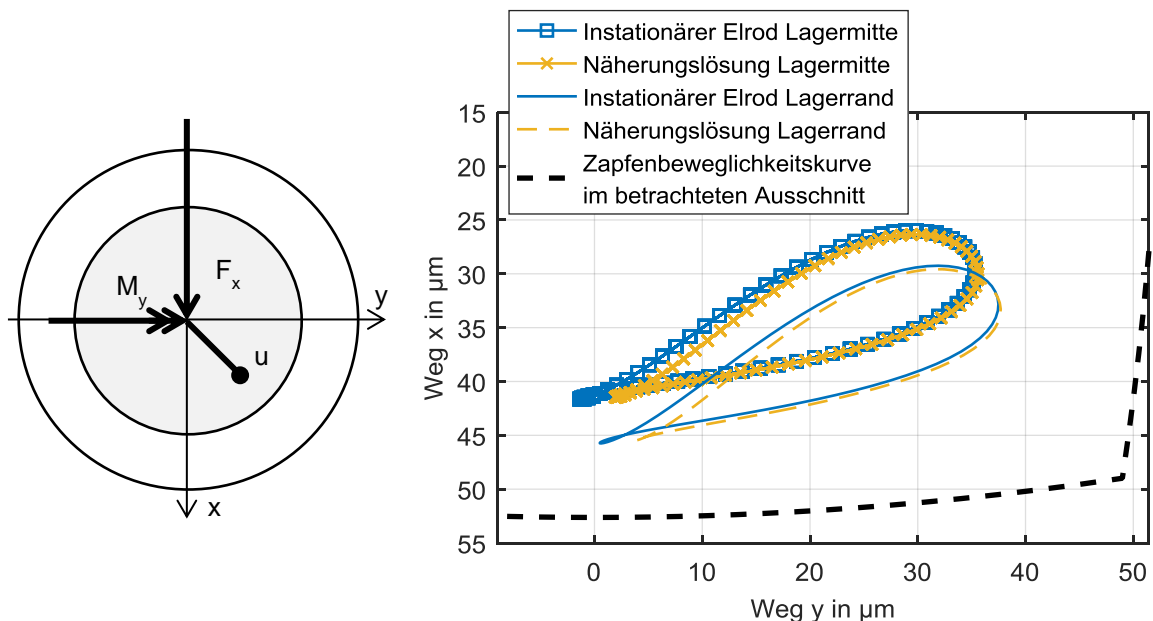


Abbildung 5.3: Durch ein äußeres Moment hervorgerufene Verkantung eines Einmassenrotors, gelagert in einem Vierflächenlager; Bahnkurven in der Lagermitte und am Lagerrand, berechnet nach dem erweiterten Näherungsverfahren und dem instationären Elrod-Algorithmus

5.1.2 Verifikation des nichtlinearen Näherungsverfahrens

Während das nichtlineare Näherungsverfahren in vielen Parameterbereichen mit dem instationären Elrod-Algorithmus als validiert bezeichnet werden kann, existieren auch Bereiche, in denen das Verfahren offensichtlich seine Gültigkeit verliert. Das Näherungsverfahren basiert auf der Annahme, dass der Quellterm der Couette-Strömung den Füllungsgrad bestimmt und der Verdrängungsterm einen vernachlässigbaren Einfluss auf dessen lokale Verteilung besitzt. Weitere Untersuchungen haben ergeben, dass diese Annahme nicht bei allen praxisrelevanten Betriebsbedingungen zutrifft, da der Verdrängungsterm den Füllungsgrad und somit die Dämpfungskoeffizienten signifikant beeinflusst. Dies führt dazu, dass die Dämpfungskoeffizienten eine Geschwindigkeitsabhängigkeit besitzen. Zur Veranschaulichung dieses Sachverhaltes werden die Dämpfungskoeffizienten numerisch, unter Berücksichti-

gung des Verdrängungsterms durch Vorgabe der Verlagerungsgeschwindigkeit, mittels Differenzenquotienten berechnet. In Abbildung 5.4 sind für eine Zapfenposition in einem Vierflächen-Lager mit einer Profilierung von $\psi_v = 2$ die Dämpfungskoeffizienten für verschiedene Verlagerungsgeschwindigkeiten exemplarisch angegeben. Der Zusammenhang der dimensionslosen und der dimensionsbehafteten Dämpfungskoeffizienten ist durch $d_{ij} = \beta_{ij} 2B\eta/\psi^3$ gegeben. Bewegt sich der Zapfen in Richtung der nähergelegenen Lagerseite (hier: $\dot{\epsilon} < 0$) geht das mit einem Anstieg der dimensionslosen Haupt-Dämpfungskoeffizienten β_{xx} und β_{yy} einher. Bei der entgegengesetzten Bewegungsrichtung (hier: $\dot{\epsilon} > 0$) verringern sich die Koeffizienten dagegen. Bewegt sich der Zapfen parallel zur Lagerschale, sind die Haupt-Dämpfungskoeffizienten praktisch unabhängig von der Bewegungsgeschwindigkeit.

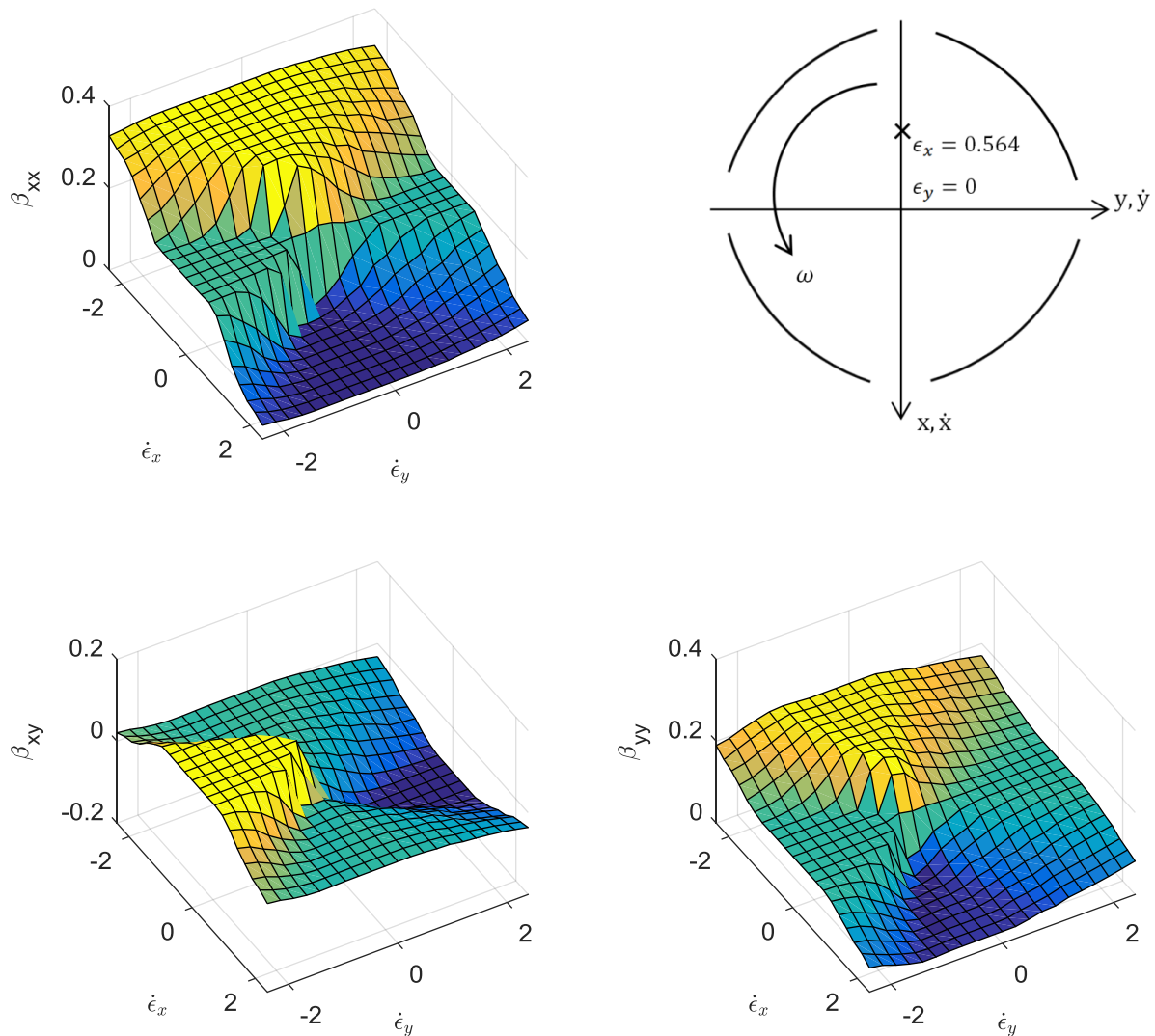


Abbildung 5.4: Dimensionslose lokale Dämpfungskoeffizienten β eines Vierflächenlagers ($\psi_v = 2$) in Abhängigkeit der dimensionslosen Zapfenverlagerungsgeschwindigkeit $\dot{\epsilon}$; Oben rechts: Koordinatensystem und Betriebspunkt

Für die Koppelkoeffizienten gilt Besagtes in genau umgekehrter Abhängigkeit, was aus Abbildung 5.4 ebenfalls hervorgeht. Je geringer die Drehzahl, desto stärker beeinflusst der Verdrängungsterm die Spaltfüllung, es bestimmt also das Verhältnis der beiden Quellterme der Reynolds'schen Differenzialgleichung die Änderung der Dämpfungskoeffizienten $\beta(\dot{e})$. Bei geringen Verlagerungsgeschwindigkeiten besitzen die Koeffizienten in sehr guter Näherung einen linearen Verlauf und sie gehen bei hohen Geschwindigkeiten in eine Sättigung über. Die Sättigung tritt ein, da der gesamte Spalt in Bewegungsrichtung ab einer bestimmten Geschwindigkeit Vollfüllung aufweist und eine weitere Steigerung der Geschwindigkeit den Füllungsgrad nicht mehr ändert.

Zur Bestimmung des Gültigkeitsbereiches des Näherungsverfahrens wird die Zapfenbewegung vorgegeben und die Lagerkräfte werden sowohl mit dem Näherungsverfahren als auch mit der direkten Lösung der Reynolds'schen Differenzialgleichung berechnet, wodurch die Abweichung der Lagerkräfte direkt ermittelt werden kann. Abbildung 5.5 zeigt die Abweichung beider Verfahren für eine kreisförmige und eine horizontale Zapfenbewegung in Abhängigkeit der Lagerprofilierung, der Schwingungsamplitude und des Frequenzverhältnisses. Bei einem Frequenzverhältnis von $\omega_s/\omega = 2$ absolviert die Schwingung zwei Perioden pro Umdrehung des Wellenzapfens. Der Verdrängungsterm nimmt mit zunehmendem Frequenzverhältnis, zunehmendem Bahnradius und abnehmender Profilierung zu, wodurch der Couette-Quellterm zunehmend an Dominanz verliert. Die Annahme eines von der Zapfenrotation bestimmten Füllungsgrades trifft somit nicht mehr mit ausreichender Genauigkeit zu und die Abweichungen steigen an. Das Verfahren sollte daher nur für stark profilierte Lager angewendet werden ($\psi_v > 4$ im Falle des Vierflächenlagers). Weitere, hier nicht grafisch aufgeführte Untersuchungen ergeben, dass die beste Übereinstimmung mit dem instationären Elrod-Algorithmus vorliegt, wenn das Dämpfungsvermögen im Kavitationsgebiet vernachlässigt wird. Andere Annahmen, wie z. B. das Dämpfungsvermögen mit dem Füllungsgrad zu skalieren, führen zu schlechteren Übereinstimmungen.

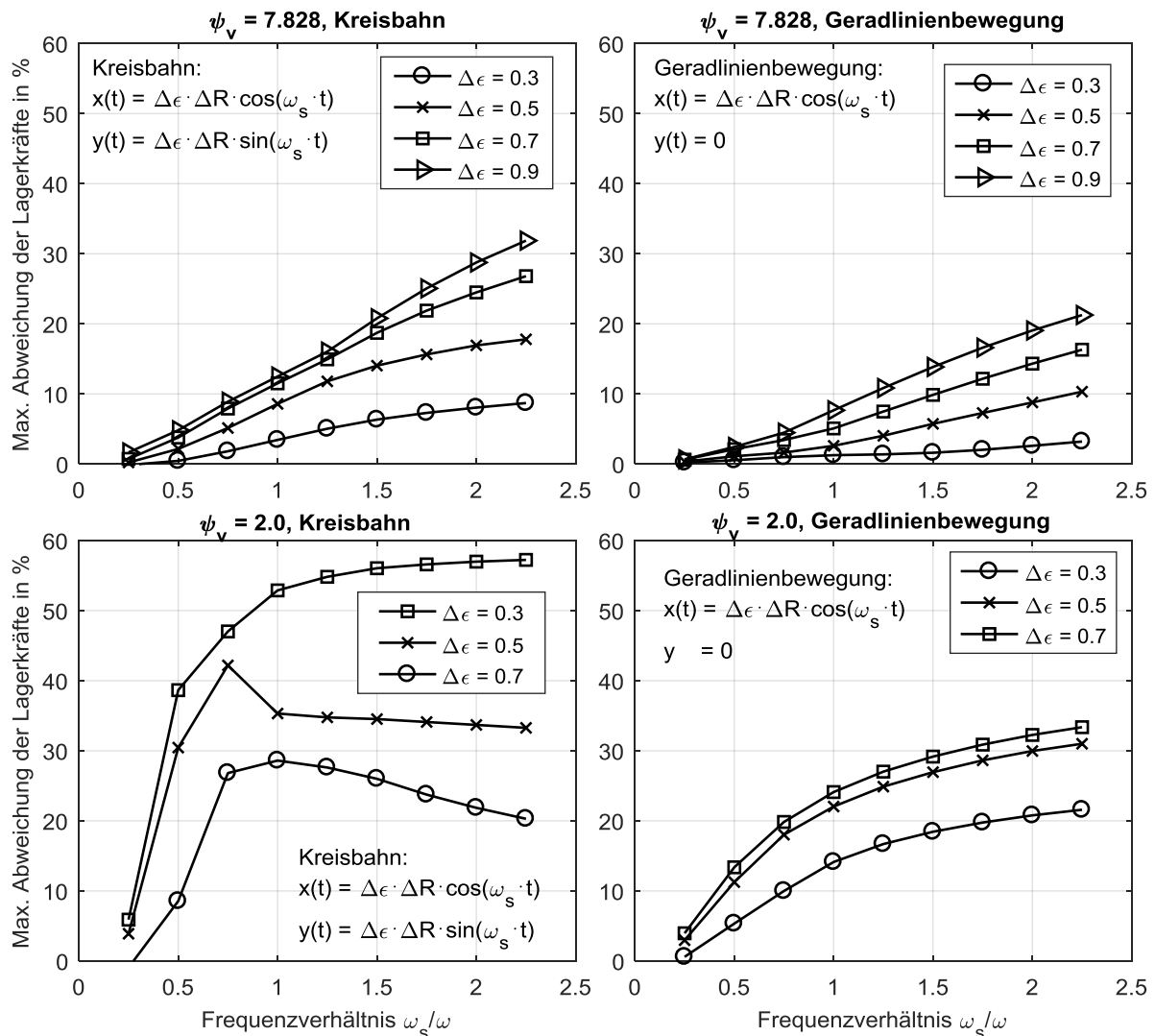


Abbildung 5.5: Abweichung des Näherungsverfahrens zur direkten Lösung nach dem instationären Elrod Algorithmus für eine kreisförmige Umlaufbewegung sowie eine horizontale Bewegung des Zapfens in Abhängigkeit des Bahnradius $\Delta\epsilon \cdot \Delta R$, des Frequenzverhältnisses ω_s/ω und der Lagerprofilierung ψ_v

5.1.3 Validierung des nichtlinearen Näherungsverfahrens

Die Validierung des Verfahrens erfolgt an dem fliegend gelagerten Rotor nach Abbildung 5.6. Der Rotor besitzt zwei Vierflächenlager mit einem relativen Lagerspiel von $\psi = 2,1 \text{ ‰}$ und einer Profilierung von $\psi_v = 6,3$ und liegt daher im Bereich guter Approximation des Näherungsverfahrens. Abbildung 5.7 zeigt die berechneten Amplitudengänge des Rotors für verschiedene Unwuchtbeträge und den Vergleich mit den gemessenen Resonanzamplituden sowie die Resonanzdrehzahlen und die Stabilitätsgrenze.

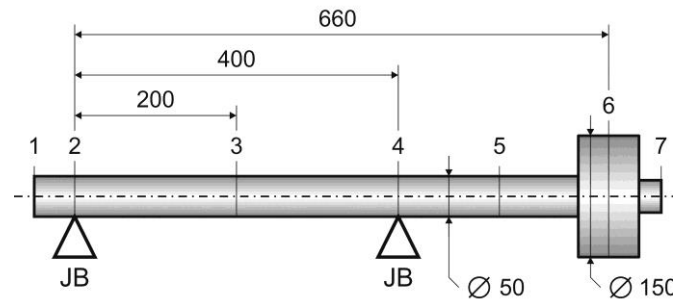


Abbildung 5.6: Fliegend gelagerter Rotor nach [17]

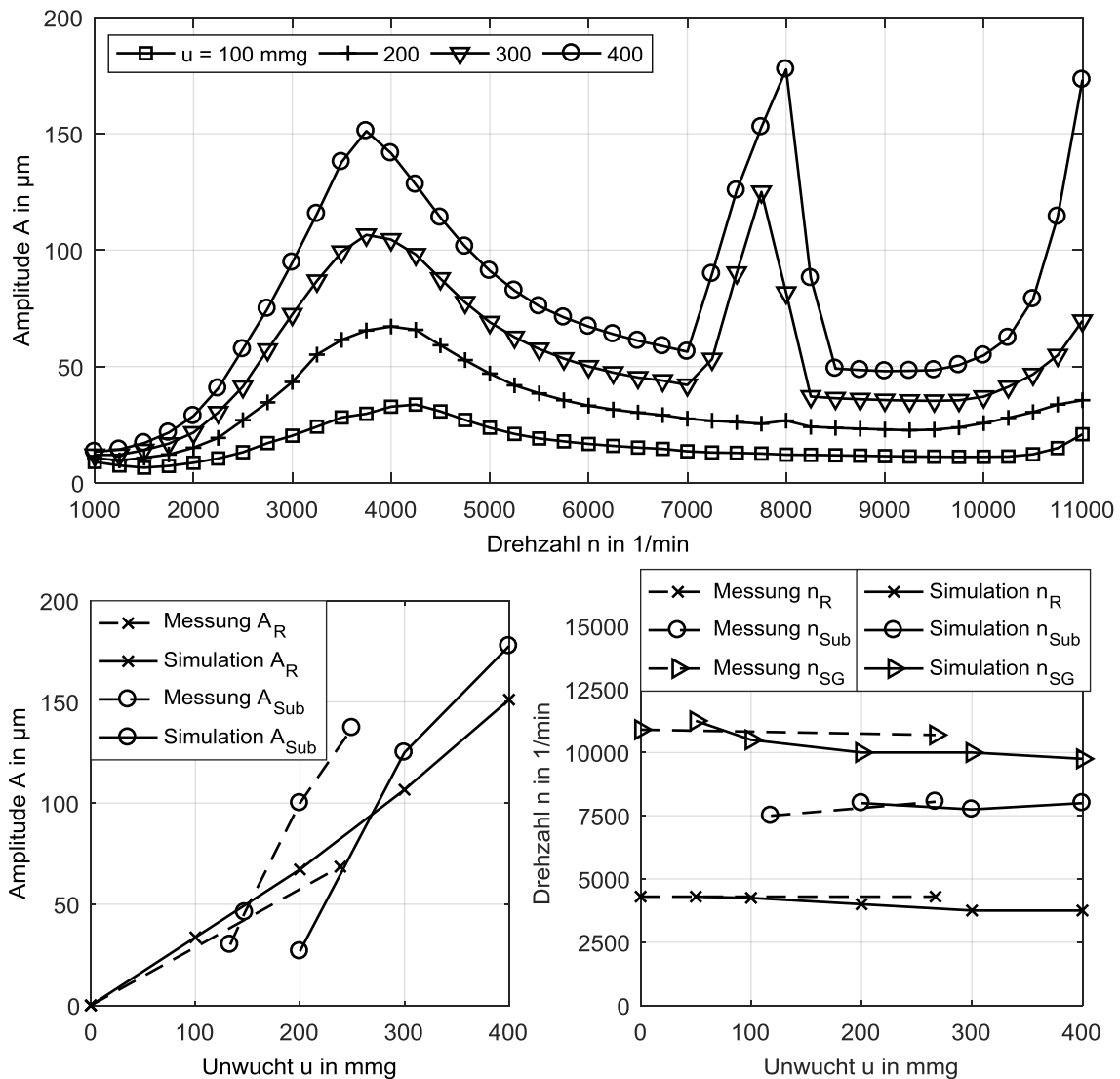


Abbildung 5.7: Simulierte Amplitudengänge des fliegend gelagerten Rotors aus Abbildung 5.6 und Vergleich mit den gemessenen Resonanzamplituden A_R , Amplituden der Subharmonischen Resonanz A_{Sub} , sowie die Drehzahlen der Resonanz n_R , der Subharmonischen Resonanz n_{Sub} und der Stabilitätsgrenze n_{SG} nach [17]

Neben der ersten Resonanz verfügt der Rotor noch über eine so genannte subharmonische Resonanz, die etwa bei der doppelten ersten kritischen Drehzahl bei grö-

ßeren Unwuchten auftritt. Insgesamt wird die Übereinstimmung von Rechnung und Messung als gut erachtet.

5.1.4 Berücksichtigung des veränderlichen Füllungsgrades

Die Änderung des Füllungsgrades aufgrund der Zapfenverlagerungsgeschwindigkeit kann im Näherungsverfahren zur Approximation der nichtlinearen Lagerkräfte berücksichtigt werden. Hierfür werden bei der Kennfelderstellung in jedem Verlagerungspunkt zusätzlich verschiedene Zapfenverlagerungsgeschwindigkeiten \dot{x} und \dot{y} aufgeprägt, wodurch die lokalen Dämpfungskoeffizienten, wie in Abbildung 5.4 gezeigt, bestimmt werden können. Die instationären Verdrängungskräfte können anschließend durch Integration der Dämpfungskoeffizienten über die Verlagerungsgeschwindigkeit bestimmt werden [97]:

$$F_{V_x}(\dot{x}, \dot{y}) = \int_0^{\dot{x}} d_{xx}(\dot{x}, \dot{y} = 0) d\dot{x} + \int_0^{\dot{y}} d_{xy}(\dot{x} = 0, \dot{y}) d\dot{y} \quad (5.5)$$

$$F_{V_y}(\dot{x}, \dot{y}) = \int_0^{\dot{x}} d_{yx}(\dot{x}, \dot{y} = 0) d\dot{x} + \int_0^{\dot{y}} d_{yy}(\dot{x} = 0, \dot{y}) d\dot{y}$$

Wie beim ursprünglichen Verfahren führt die Addition der Kraft aus der reinen Zapfenrotation und der Verdrängungskraft schließlich zur Gesamtlagerkraft in Abhängigkeit der Zapfenposition und der Zapfenverlagerungsgeschwindigkeit:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathbf{F}_V(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{y}}) \quad (5.6)$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_D = \begin{pmatrix} F_{D_x} \\ F_{D_y} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_V = \begin{pmatrix} F_{V_x} \\ F_{V_y} \end{pmatrix}$$

Abbildung 5.8 stellt den Vergleich des ursprünglichen Verfahrens und des modifizierten Verfahrens mit dem instationären Elrod-Algorithmus unter Berücksichtigung des zeitlich veränderlichen Füllungsgrades (Elrod-OFH) dar. Das modifizierte Verfahren zeigt eine deutlich verbesserte Übereinstimmung mit dem instationären Elrod-Algorithmus.

Da der Aufwand zur Kennfelderstellung und der anschließenden Kennfeldinterpolation im Vergleich zum ursprünglichen Verfahren ansteigen, wird stattdessen die direkte Lösung der Reynolds'schen Differenzialgleichung empfohlen.

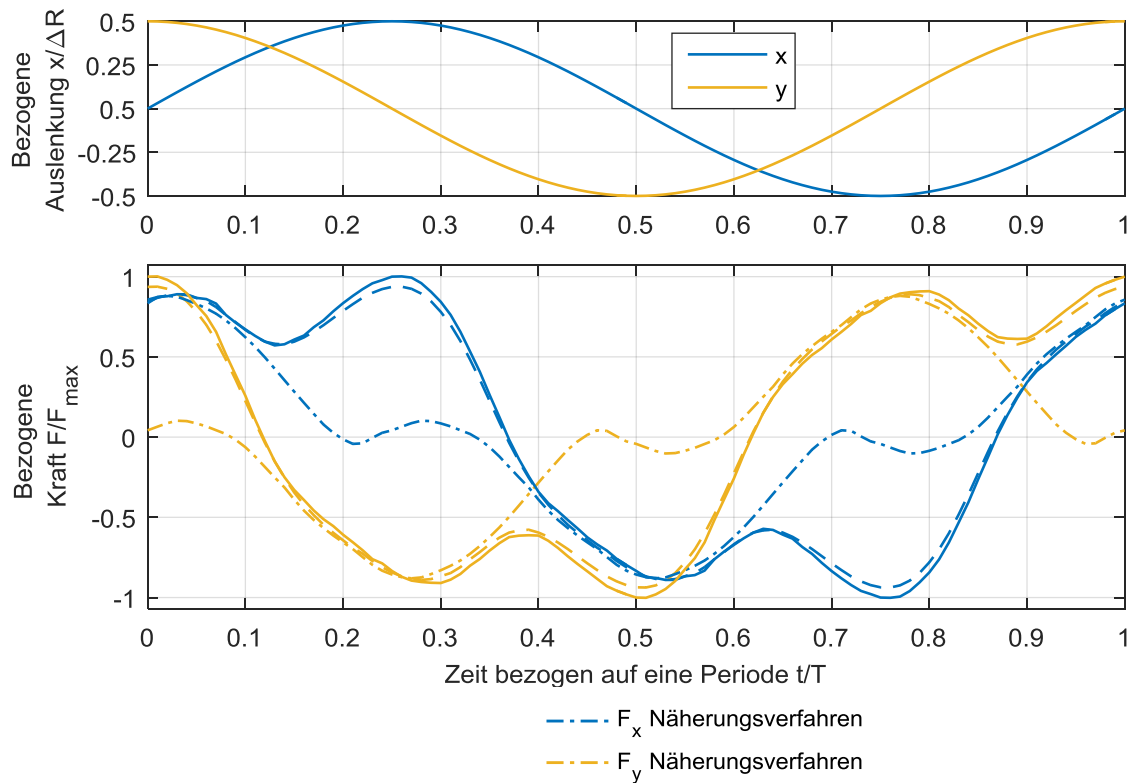


Abbildung 5.8: Vergleich der Lagerkräfte verschiedener Berechnungsverfahren bei einer kreisförmigen Zapfenbahn in einem Vierflächen-Festsegmentlager mit einer Profilierung von $\psi_v = 2$

5.2 Näherungsverfahren für Kippsegmentlager

Das Prinzip des nichtlinearen Näherungsverfahrens kann durch geeignete Modifikationen auch auf Kippsegmentlager angewendet werden. Die Änderungen werden mit dem Anspruch einer ausreichenden Approximationsgüte bei gleichzeitig möglichst geringem Rechenaufwand durchgeführt. Hierfür werden zunächst folgende Annahmen zugrunde gelegt:

- Die Trägheitskräfte aufgrund der Segmentmasse sind klein gegenüber den Schmierfilm- und Abstützungskräften
- Der Spaltfüllungsgrad ändert sich nicht mit der Verlagerungsgeschwindigkeit
- Der Einfluss des Segmentrollens kann durch eine reine Kippbewegung angenähert werden
- Der Schmierstoff wird dem Segment unter Umgebungsdruck zugeführt
- Die hydrodynamische Lagerkraft im seitlichen Dichtungsbereich ist vernachlässigbar
- Die mechanische Segmentaufbiegung aufgrund des dynamischen Druckaufbaus wird vernachlässigt

Da die dimensionslosen Kräfte und Koeffizienten durch die elastische Segmentabstützung eine Drehzahlabhängigkeit erlangen, wird das Kennfeld für ein einzelnes starr abgestütztes Segment erstellt und die Abstützungselastizität und Kippbeweglichkeit erst nach dem Dimensionieren der Schmierfilmkraft berücksichtigt. Das Prinzip dieser Vorgehensweise ist in Abbildung 5.9 skizziert. Das Kennfeld wird für mehrere Radialstrahlen für die relative Lage von Zapfen und Segment erstellt.

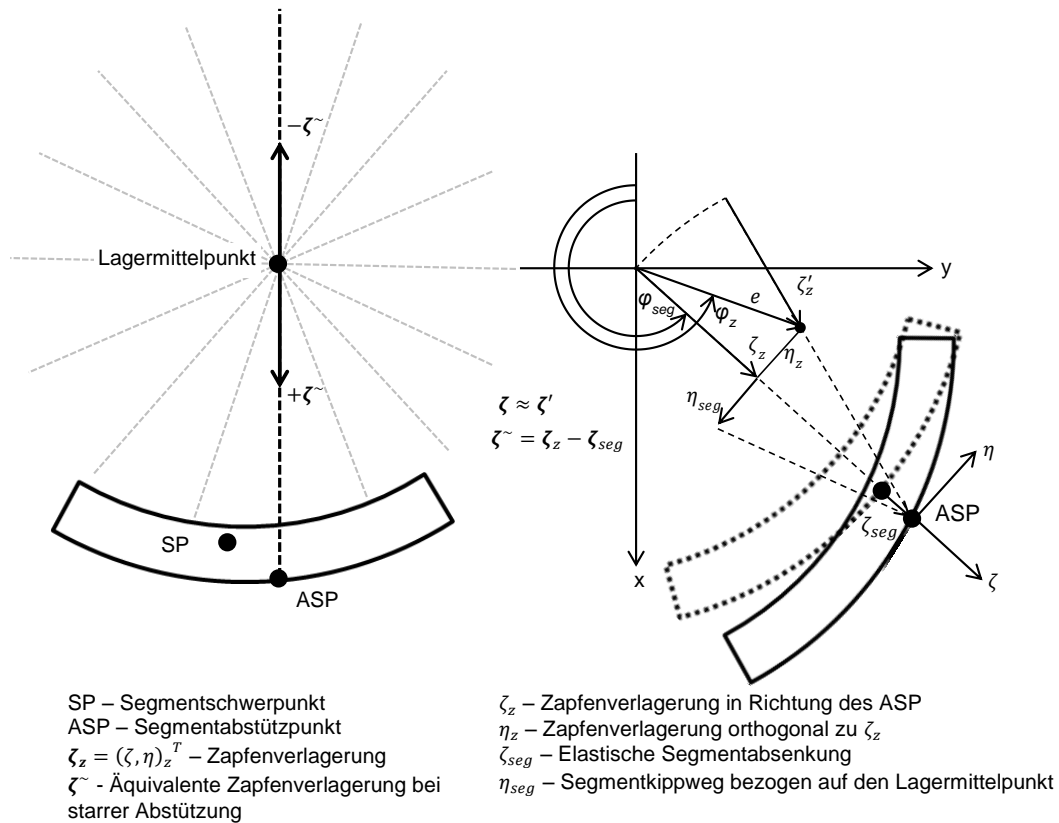


Abbildung 5.9: Verfahren zur Approximation der nichtlinearen Lagerrückstellkräfte bei Kippsegmentlagern, links: Kennfelderstellung für das starr abgestützte Segment, rechts: Zapfen- und Segmentstellung im Lager und Berechnung der äquivalenten Zapfenverlagerung bei starrer Abstützung zur Bestimmung der Segmentkraft aus dem Kennfeld.

Zu jeder Zapfenposition werden die Sommerfeldzahl und die dynamischen Schmierfilmkoeffizienten des festgehaltenen Segmentes berechnet. Unter der Annahme, dass das Segmentabrollen einen vernachlässigbaren Einfluss besitzt, beträgt der Anteil der Zapfenverlagerung in Richtung des Abstützpunktes

$$\zeta_z = D_a - \sqrt{e^2 + D_a^2 - 2 e D_a \cos(\varphi_z - \varphi_{seg})}. \quad (5.7)$$

Da die Exzentrizität e klein gegenüber dem Lageraußendurchmesser D_a ist, kann mit ausreichender Genauigkeit

$$\zeta_z \approx e \cos(\varphi_z - \varphi_{seg}) \quad (5.8)$$

gesetzt werden. Für das masselose Segment lautet das Kräftegleichgewicht von Schmierfilm- und Abstützungssteifigkeit

$$\mathbf{F}_{seg,sf} - \mathbf{F}_{seg,ab} = \mathbf{0}. \quad (5.9)$$

Die Dämpfungskräfte des Schmierfilms und der Abstützung besitzen mit steigenden Schwinggeschwindigkeiten zunehmenden Einfluss auf die Segmentstellung, weshalb diese mit zunehmender Frequenz berücksichtigt werden müssen. Zur Berücksichtigung der Dämpfungskräfte müssen die Segmentverlagerungsgeschwindigkeiten bekannt sein. Hierzu erfolgt die Einführung der radialen und angularen Segmentstellung als Zustände für die Zeitintegration. Die Segmentstellung ist somit im aktuellen Zeitschritt bekannt. Mit der Relativbewegung von Zapfen und Segment beträgt die Schmierfilmkraft

$$\mathbf{F}_{seg,sf} = \mathbf{F}_{sf,D} + \mathbf{D}_{sf}(\dot{\zeta}_z - \dot{\zeta}_{seg}), \quad (5.10)$$

mit

$$\mathbf{F}_{sf,D}(\zeta_z, \zeta_{seg}) = \begin{pmatrix} f_{sf,D,\zeta} \\ f_{sf,D,\eta} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_{sf}(\zeta_z, \zeta_{seg}) = \begin{bmatrix} d_{\zeta\zeta} & d_{\zeta\eta} \\ d_{\eta\zeta} & c_{\eta\eta} \end{bmatrix}_{sf}, \quad \zeta_{seg} = \begin{pmatrix} \zeta \\ \eta \end{pmatrix}_{seg}. \quad (5.11)$$

Der Anteil $\mathbf{F}_{sf,D}$ beschreibt die Schmierfilmkraft, die aus der reinen Zapfenrotation resultiert. Die Dämpfungsmatrix \mathbf{D}_{sf} ist für die instationären Schmierfilmkräfte aufgrund der Zapfen- und Segmentgeschwindigkeiten maßgebend. Die linear elastische Abstützungskraft eines Segmentes ist proportional zur Relativbewegung von Segment und Lagerring:

$$\mathbf{F}_{seg,ab} = \mathbf{K}_{ab}(\zeta_{lr} - \zeta_{seg}) + \mathbf{D}_{ab}(\dot{\zeta}_{lr} - \dot{\zeta}_{seg}) \quad (5.12)$$

Ein ideal kippbewegliches Segment besitzt nur Abstützungssteifigkeiten und -dämpfungen in Richtung des Abstützpunktes und die Matrizen in Gleichung (5.12) lauten:

$$\mathbf{K}_{ab} = \begin{bmatrix} k_{\zeta\zeta} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{ab}, \quad \mathbf{D}_{ab} = \begin{bmatrix} d_{\zeta\zeta} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{ab}. \quad (5.13)$$

In Gleichung (5.12) wird exemplarisch von einer linear-elastischen Abstützung ausgegangen. Im Allgemeinen ist die Erweiterung auf eine nichtlineare Abstützungseigenschaft jedoch möglich. Da die Segmentstellung aus dem Zustandsvektor bekannt ist, kann aus dem Kräftegleichgewicht (5.9) die Segmentgeschwindigkeit bestimmt werden:

$$\dot{\zeta}_{seg} = (\mathbf{D}_{sf} + \mathbf{D}_{ab})^{-1} [\mathbf{F}_{sf,D} + \mathbf{D}_{sf}\dot{\zeta}_z + \mathbf{K}_{ab}(\zeta_{lr} - \zeta_{seg}) + \mathbf{D}_{ab}\dot{\zeta}_{lr}]. \quad (5.14)$$

Nach Berechnung der Segmentgeschwindigkeit folgt die Segmentkraft explizit aus den Gleichungen (5.10) oder (5.12). Die vektorielle Addition aller Einzelsegmentkräfte liefert schließlich die resultierende Gesamtlagerkraft am Zapfen:

$$F_x = \sum_{i=1}^{Nseg} -F_{i,sf,x} \cos(\varphi_{seg}) + F_{i,sf,y} \sin(\varphi_{seg}) \quad (5.15)$$

$$F_y = \sum_{i=1}^{Nseg} -F_{i,sf,x} \sin(\varphi_{seg}) - F_{i,sf,y} \cos(\varphi_{seg})$$

Das Mitführen der Segmentstellung bringt als weiteren Vorteil die automatische Berücksichtigung der Frequenzabhängigkeit der dynamischen Lagerkräfte mit sich. Bei Bildung resultierender Koeffizienten durch einen harmonischen Ansatz ginge diese Information verloren. Für die Berücksichtigung drehzahlabhängiger Zusatzeffekte, wie z. B. die Änderung des Druckaufbaus im Transitionsbereich zwischen einer laminaren und einer turbulenten Strömung, ist es prinzipiell möglich, Kennfelder verschiedener Drehzahlen zu kombinieren. Der Gültigkeitsbereich wird wie beim Festsegmentlager durch den verlagerungsgeschwindigkeitsabhängigen Füllungsgrad beschränkt. Da das Kavitationsgebiet bei Kippsegmentlagern in der Regel schwächer ausgeprägt ist als bei Festsegmentlagern, wird eine bessere Approximationsgüte erreicht. Zur Verifikation des nichtlinearen Kippsegmentlagerverfahrens werden die

Amplitudengänge des Lavalläufers mit Lagervariante 1 aus Abschnitt 2.3.10 herangezogen und mit dem Näherungsverfahren in Abbildung 5.10 verglichen.

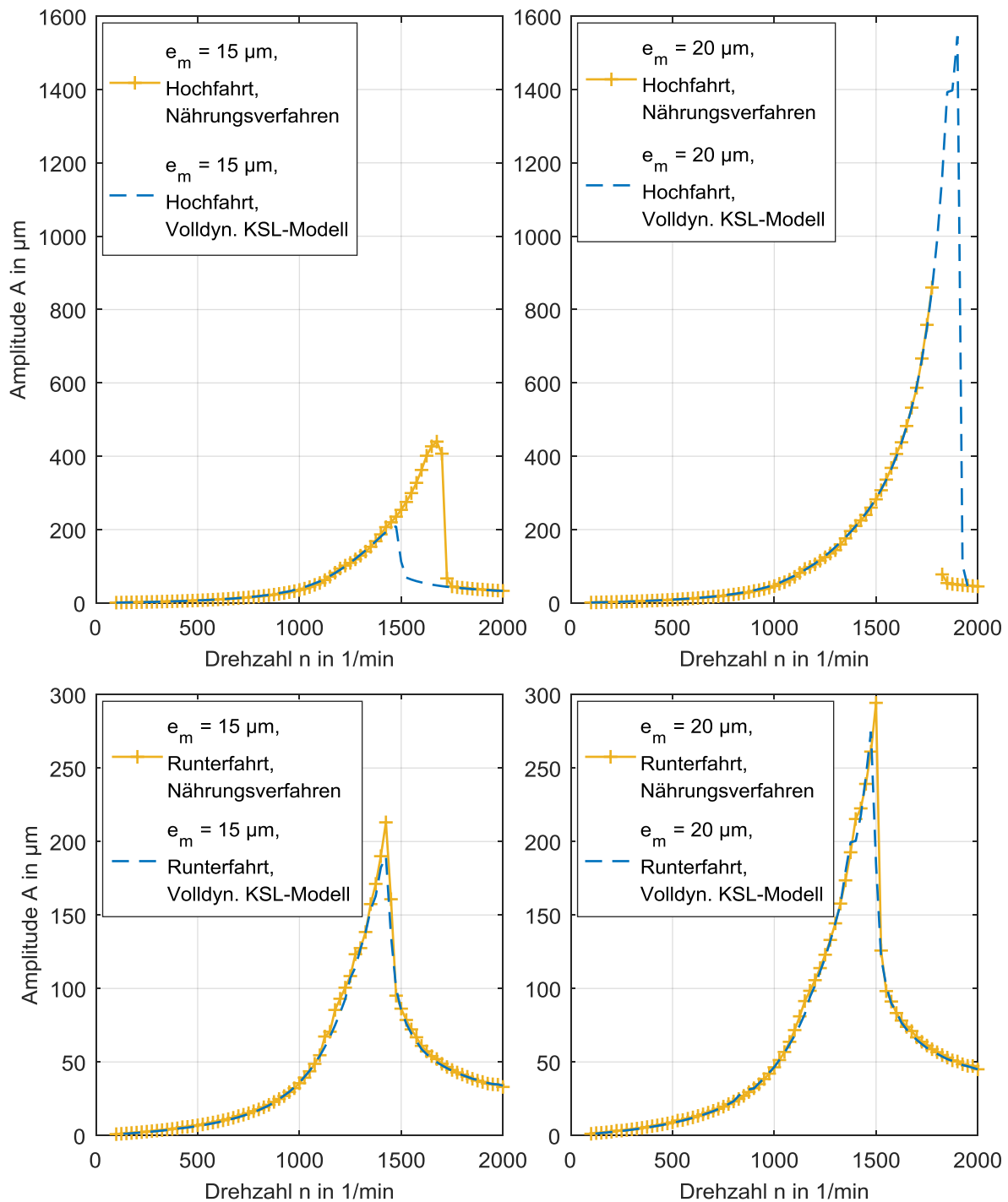


Abbildung 5.10: Amplitudengangdiagramme des vertikalen Lavalläufers aus Abschnitt 2.3.10 mit Lagervariante 1 (8-Kippsegmentlager) für zwei Schwerpunkts-exzentrizitäten e_m , erstellt mit dem nichtlinearen Näherungsverfahren für Kippsegmentlager und dem volldynamischen Kippsegmentlagermodell

Beide Lösungen zeigen eine sehr gute Übereinstimmung bezüglich der Amplituden. Abweichungen treten lediglich während der Fahrt durch die Resonanz von niedrigen

Drehzahlen hin zu großen auf. Hier verbleibt der Rotor bei der Massenexzentrizität $e_m = 15 \mu\text{m}$ gemäß der Näherung länger auf dem Lösungsast mit der größeren Amplitude. Die Abweichungen können durch die vereinfachenden Annahmen der Ölmengenverteilung im Spalt sowie der vernachlässigten Segmentträgheit erklärt werden. Zudem verhält sich das System im Bereich der Resonanz besonders nichtlinear und sensitiv bezüglich geringster Abweichungen in den Lagerkräften, was zu diesem abweichendem Verhalten führen kann. Hier sind als zusätzliche Fehlerquellen die Interpolationsfehler zu nennen, die bei kennfeldbasierten Methoden immer existieren. Während der Runterfahrt treten diese Abweichungen nicht auf.

5.3 Gültigkeitsprüfung der linearen Theorie mittels Störungsrechnung höherer Ordnung

Nach Berechnung der Bahnkurven mittels linearer Analyse kann durch Einsetzen dieser in das erweiterte Kraftgesetz höherer Ordnung (2.59) die nichtlineare Lagerkraft berechnet und der Linearisierungsfehler abgeschätzt werden. Beim Kippsegmentlager müssen zusätzlich die dynamischen Eigenschaften der Segmentabstützung berücksichtigt werden. Im nichtlinearen Modell ist die Bildung einer resultierenden Gesamtsteifigkeit und -dämpfung von Schmierfilm und Abstützung im Allgemeinen nicht möglich, da die Segmentbewegung trotz harmonischer Zapfenbewegung von der harmonischen Form abweichen kann. Die Bildung einer resultierenden Gesamtsteifigkeit müsste unter der Annahme einer harmonischen Schwingbewegung von Zapfen- und Segment in Abhängigkeit der Schwingungsfrequenz und Schwingungsamplitude erfolgen. Auf die Bildung einer Gesamtsteifigkeit wird deshalb verzichtet und stattdessen für eine konkret vorliegende Zapfenbewegung die Segmentbewegung zeitlich aufgelöst. Hierzu wird zu jedem Zeitpunkt die Erfüllung des Gleichgewichts von Schmierfilm- und Abstützungskraft gefordert:

$$\mathbf{0} = \mathbf{F}_{sf}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) - \mathbf{F}_{Ab}(\mathbf{X}_{ab}, \dot{\mathbf{X}}_{ab}) \quad (5.16)$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \mathbf{X}_z - \mathbf{X}_{seg}, \quad \mathbf{X}_{ab} = \mathbf{X}_{seg} - \mathbf{X}_{lr}$$

Hierin lautet die linearisierte Abstützungskraft

$$\mathbf{F}_{Ab} = \mathbf{k}_{Ab}\mathbf{X}_{ab} + \mathbf{d}_{Ab}\dot{\mathbf{X}}_{ab}. \quad (5.17)$$

Die Beschreibung der Schmierfilmkraft erfolgt mit dem Ansatz dritter Ordnung nach Gleichung (2.59). Bei einer nichtlinearen Abstützungssteifigkeit muss zusätzlich die statische Ruhelage bei Auswertung von Gleichung (5.16) berücksichtigt werden. Die Kippbewegung des Segmentes wird mit einer äquivalenten, translatorischen Bewegung mit Bezug zur Lagermitte abgebildet. Für die Schmierfilmkraft ist die Relativbewegung von Zapfen X_z und Segment X_{seg} und für die Abstützungskraft die Relativbewegung von Segment X_{seg} und Lagerring X_{lr} maßgebend. Abbildung 5.11 veranschaulicht das Vorgehen anhand einer Bahnkurve und Abbildung 5.12 anhand eines Flussdiagramms. Für eine bekannte Zapfenbahnkurve und eine zunächst angenommene, beliebige Segmentbahnkurve wird Gleichung (5.16) nach der Segmentgeschwindigkeit gelöst. An einem beliebigen Punkt der Bahnkurve führt die zeitlich integrierte Geschwindigkeit zu einer neuen Position für den nachfolgenden Punkt auf der Bahnkurve. Die rekursive Korrektur der Bahnkurve konvergiert schließlich gegen eine konstante, geschlossene Segmentbewegung. In der Regel liegt die konvergierte Bahnkurve bereits nach der zweiten Umdrehung vor. Zur Steigerung der Stabilität des Verfahrens erfolgt die zeitliche Integration nach der Trapezregel, bei der die Geschwindigkeiten des letzten $(n-1)$ und des aktuell auszuwertenden Zeitpunktes (n) vorliegen muss. Die korrigierte Zapfenposition muss demnach simultan mit der Zapfengeschwindigkeit iterativ ermittelt werden.

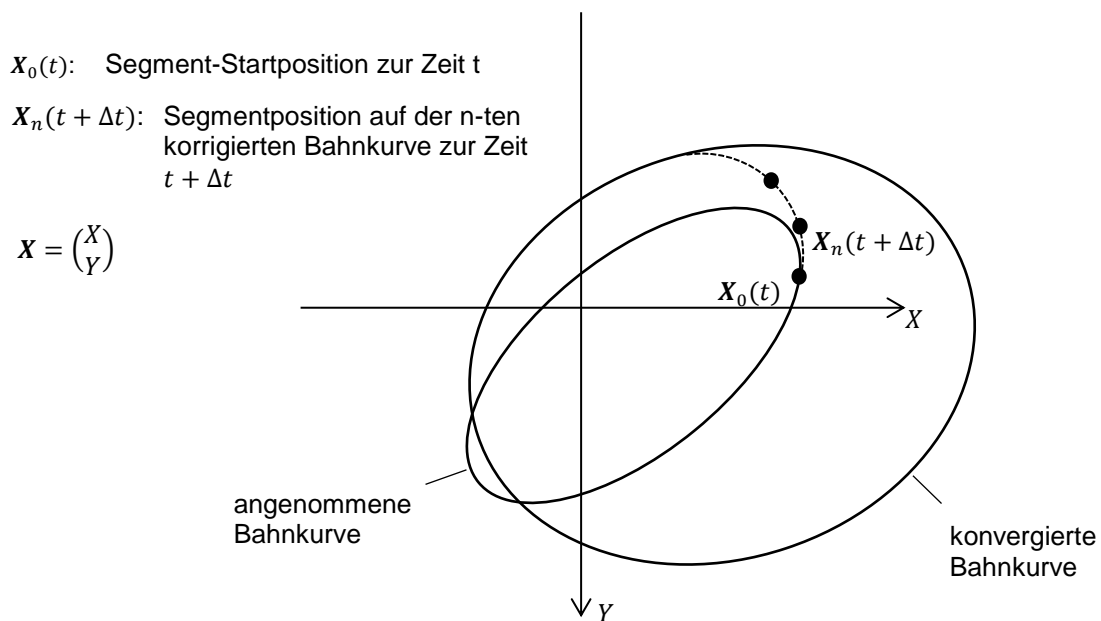


Abbildung 5.11: Schematische Darstellung des Segmentbahniterationsverfahrens (SBIV)

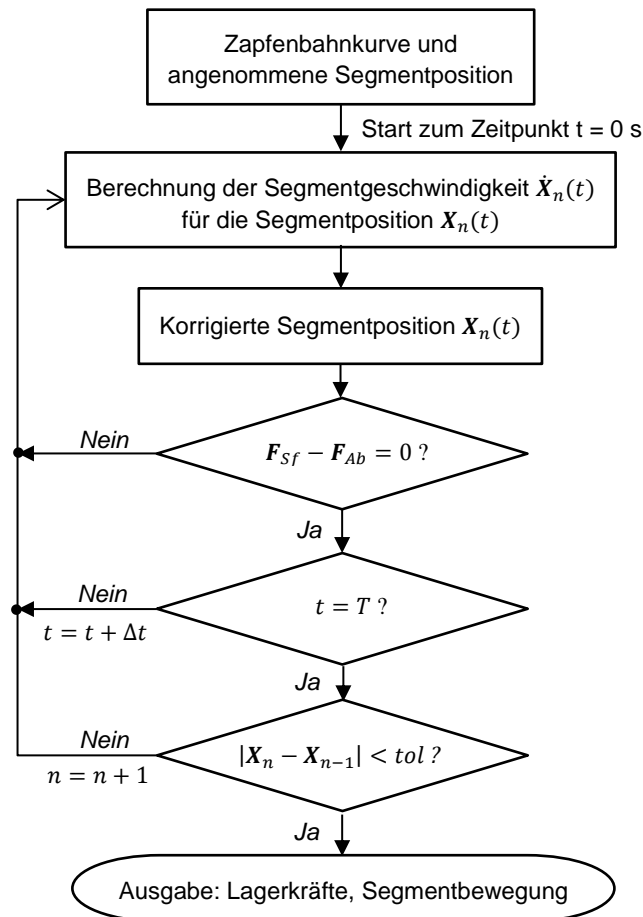


Abbildung 5.12: Flussdiagramm des Segmentbahniterationsverfahrens (SBIV)

Zur Verifizierung und Anwendung des SBIV wird der Lavalläufer aus Abschnitt 2.3.10 mit Lagervariante 1 herangezogen. Der unwuchtige, vertikale Rotor ist in zwei 8-Kippsegmentlagern gelagert und besitzt keine radiale statische Grundlast. Abbildung 5.13 zeigt die Ergebnisse des SBIV im Vergleich mit einer linearen und einer nichtlinearen Unwuchtanalyse. Die Verifizierung erfolgt in zwei Schritten:

1. Die Bahnkurve und die Lagerkräfte sind aus einer linearen Analyse bekannt (*Lineare Analyse*). Zu dieser Bahnkurve werden die Lagerkräfte nach dem SBIV-T(1) berechnet (*SBIV-T(1) mit Zapfenbahnkurve der linearen Analyse*). Beide Lösungen zeigen eine exakte Übereinstimmung.
2. Die Bahnkurve und die Lagerkräfte sind aus einer nichtlinearen Analyse bekannt (*Nichtlineare Analyse mit volldynamischem Kippsegmentlagermodell*). Zu dieser Bahnkurve werden die Lagerkräfte nach dem SBIV-T(3) bestimmt (*SBIV-T(3) mit Zapfenbahnkurve der volldynamischen Analyse*). Beide Lösungen stimmen bis zu Lagerkräften von ca. $F = 5 \text{ kN}$ sehr gut und bei größeren

Kräften, bzw. Auslenkungen näherungsweise überein. Eine exakte Übereinstimmung kann nicht erwartet werden, da die Entwicklung der Ölfilmkraft in einer Taylorreihe selbst nur eine Näherung darstellt.

Das SBIV kann nun dazu genutzt werden eine lineare Analyse zu verifizieren, indem die nichtlinearen Lagerkräfte für eine berechnete, lineare Bahnkurve bestimmt und mit den Kräften der linearen Analyse verglichen werden. Abbildung 5.13 zeigt den genannten Vergleich: (*Lineare Analyse*) und (*SBIV-T(3) mit Zapfenbahnkurve der linearen Analyse*). Nach der Prognose muss bei Drehzahlen von $n > 800 \text{ 1/min}$ verstärkt mit einem Linearisierungsfehler gerechnet werden, da beide Lösungen voneinander abweichen. Der Vergleich mit der nichtlinearen Lösung (*Nichtlineare Analyse mit volldynamischem Kippsegmentlagermodell*) zeigt, dass sowohl die Lagerkräfte als auch die Rotorauslenkungen von der linearen Analyse abweichen. In Übereinstimmung von Prognose und nichtlinearer Vergleichsrechnung nimmt der Linearisierungsfehler für große Drehzahlen im überkritischen Bereich wieder ab.

Da das SBIV die Kräfte der linearen Analyse exakt und der nichtlinearen Lösung näherungsweise nachbildet, kann das Verfahren als verifiziert betrachtet werden.

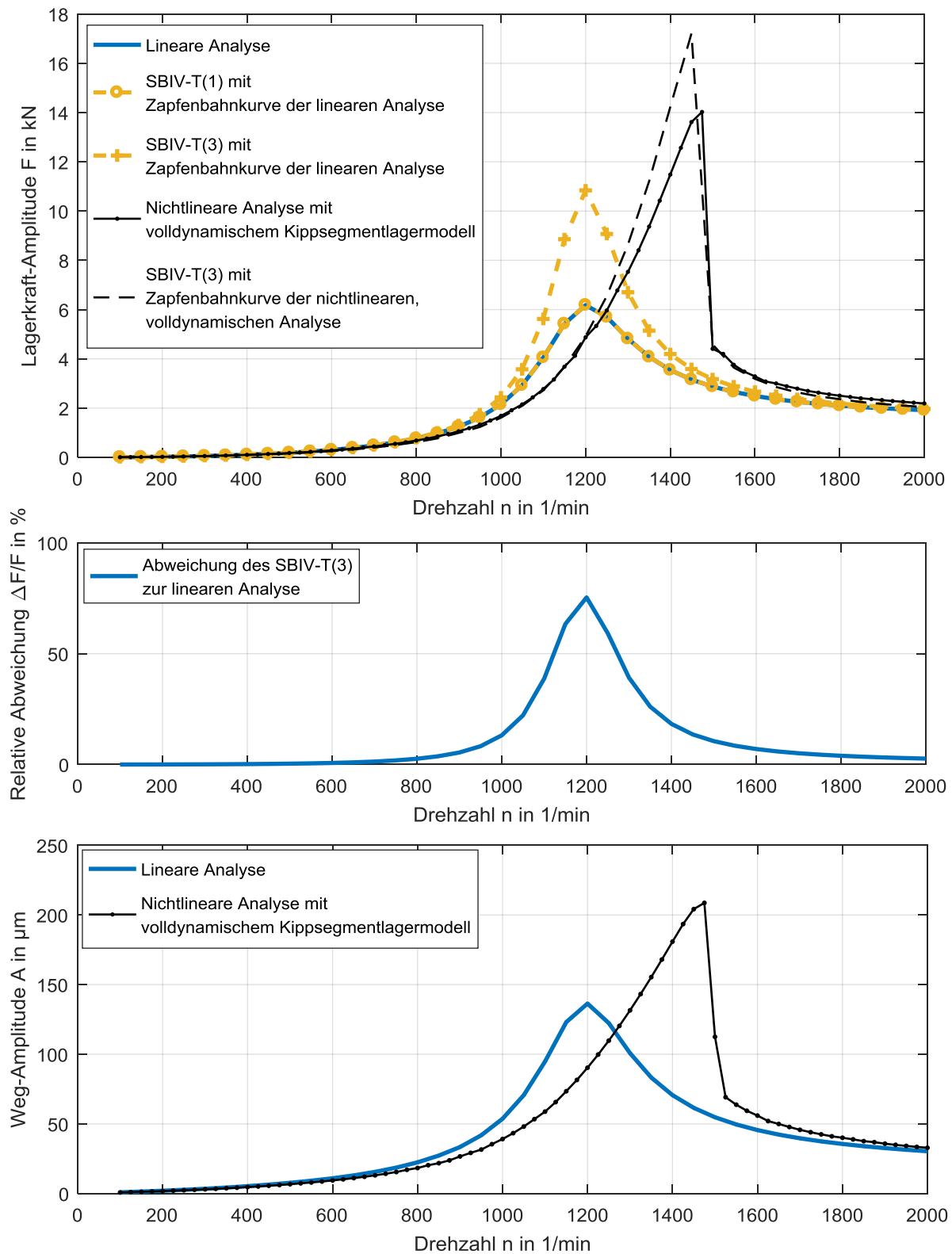


Abbildung 5.13: Gültigkeitsprüfung der linearen Theorie mit dem Segmentbahniterationsverfahren (SBIV) unter Verwendung eines linearen (T(1)) und nichtlinearen Kraftgesetzes (T(3)) am Lavalläufer mit zwei 8-Kippsegmentlagern, Massenexzentrizität $e_m = 15 \mu\text{m}$

In Abbildung 5.14 sind die vom SBIV-T(3) (*SBIV-T(3) mit Zapfenbahnkurve der linearen Analyse*) berechneten Segmentverschiebungen und Segmentkräfte des Betriebspunktes mit der Drehzahl $n = 1000 \text{ 1/min}$ dargestellt. Die Ergebnisse sind für eine Periode und relativ zur statischen Ruhelage angegeben. Trotz der sinusförmigen Zapfenbewegung weicht die Segmentbewegung von der Sinusform ab, was bereits aus den Untersuchungen mit dem volldynamischen Kippsegmentlagermodell hervorging. Weiterhin ist ersichtlich, dass die η -Kräfte sowohl in der Abstützung als auch im Schmierfilm zu jeder Zeit $F_\eta = 0 \text{ N}$ betragen. Da das Segment ideal kippbeweglich abgestützt ist, kann die Abstützung keine Momente aufnehmen, weshalb die Kraft sowohl in der Abstützung als auch im Schmierfilm orthogonal zum Abstützpunkt verschwinden muss.

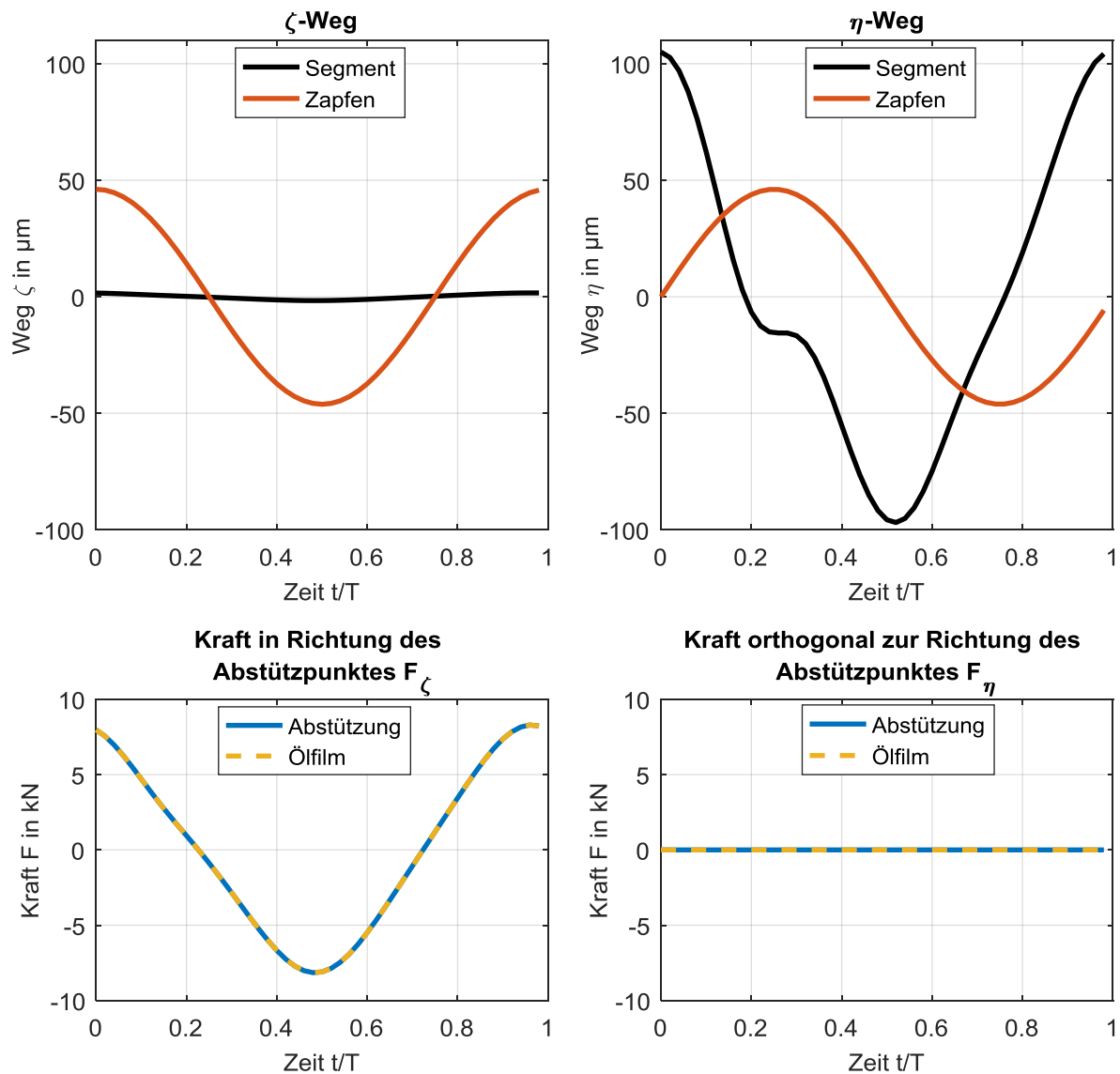


Abbildung 5.14: Segmentspezifische Größen des SBIV-T(3), ermittelt mit der Zapfenbahnkurve der linearen Analyse bei der Drehzahl $n = 1200 \text{ 1/min}$

Ein zweites Anwendungsbeispiel ist in Abbildung 5.15 dargestellt, bei dem es sich um denselben Rotor mit derselben Unwuchtconfiguration, aber mit der Lagervariante 4 (4-Kippsegmentlager) handelt. Laut Prognose des *SBIV-T(3)* kann über den gesamten Drehzahlbereich mit wesentlich geringeren Linearisierungsfehlern gerechnet werden, was die nichtlineare Vergleichsrechnung bestätigt.

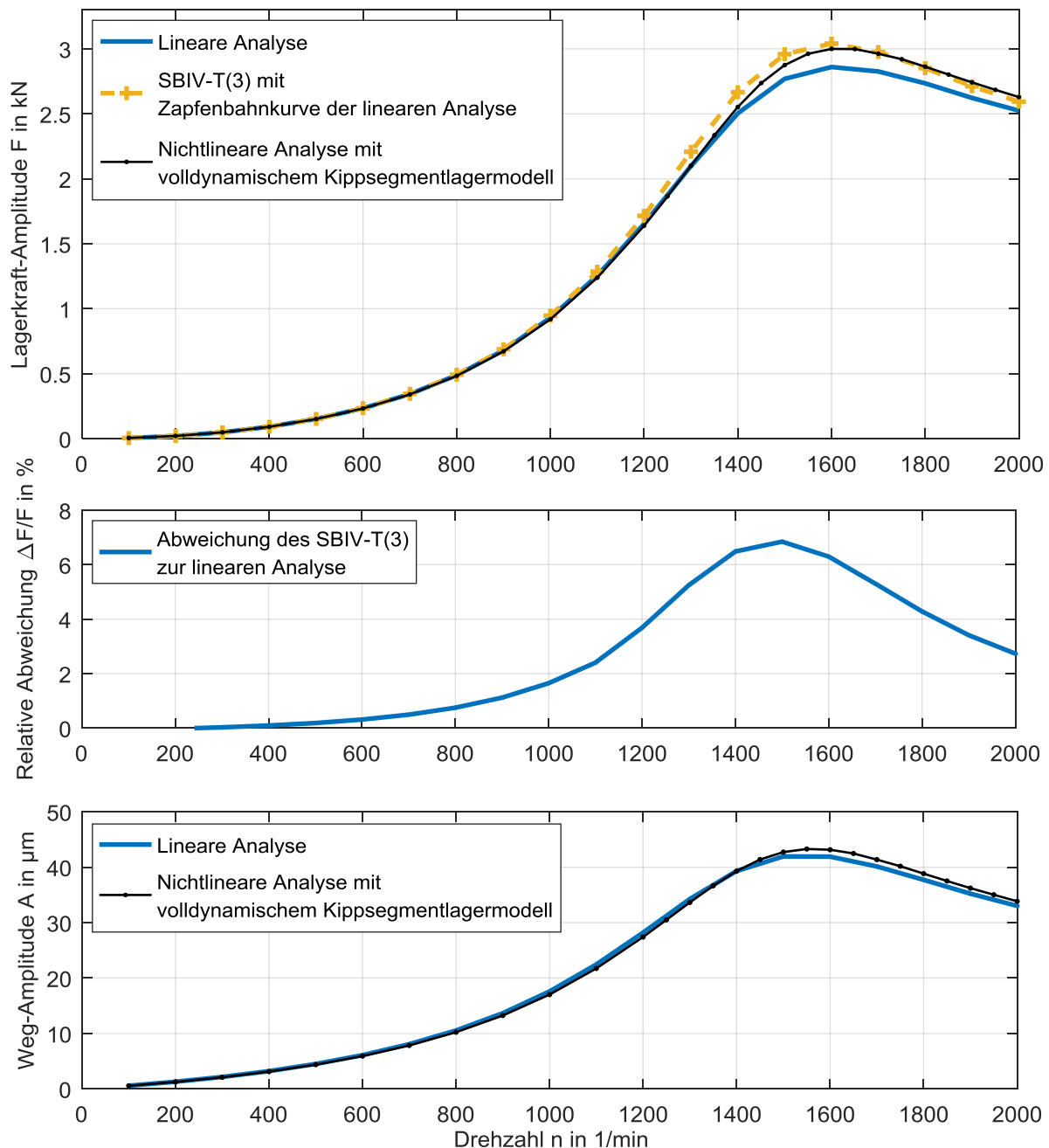


Abbildung 5.15: Gültigkeitsprüfung der linearen Theorie mit dem Segmentbahniterationsverfahren (SBIV) unter Verwendung eines nichtlinearen Kraftgesetzes ($T(3)$) am Lavalläufer mit zwei 4-Kippsegmentlagern $e_m = 15 \mu\text{m}$

Das SBIV-T(3) ist demnach dazu geeignet, das Verlassen des linearen Bereiches zu erkennen. Es muss jedoch betont werden, dass der Linearisierungsfehler nicht quan-

tifiziert werden kann, da sich mit zunehmend nichtlinearem Charakter der Lagerkräfte auch eine abweichende Bahnkurve einstellen kann. Dies führt weiter dazu, dass keine Aussage darüber getroffen werden kann, ob sich der Linearisierungsfehler auf die Bahnkurve oder die Lagerkräfte auswirkt. Hierzu zeigt Abbildung 5.16 den maximal vorhergesagten Linearisierungsfehler nach dem SBIV-T(3) im Bereich der Resonanz. Zum Vergleich sind die tatsächlichen Abweichungen der Rotor- und Lagerkraftamplituden dargestellt. Diese ergeben sich aus dem Vergleich von linearer und nichtlinearer Analyse unter Verwendung des volldynamischen Kippsegmentlagermodells. Mit steigender Massenexzentrizität nimmt sowohl die Abweichung der Lagerkraftamplituden als auch die Abweichung der Rotoramplituden progressiv zu.

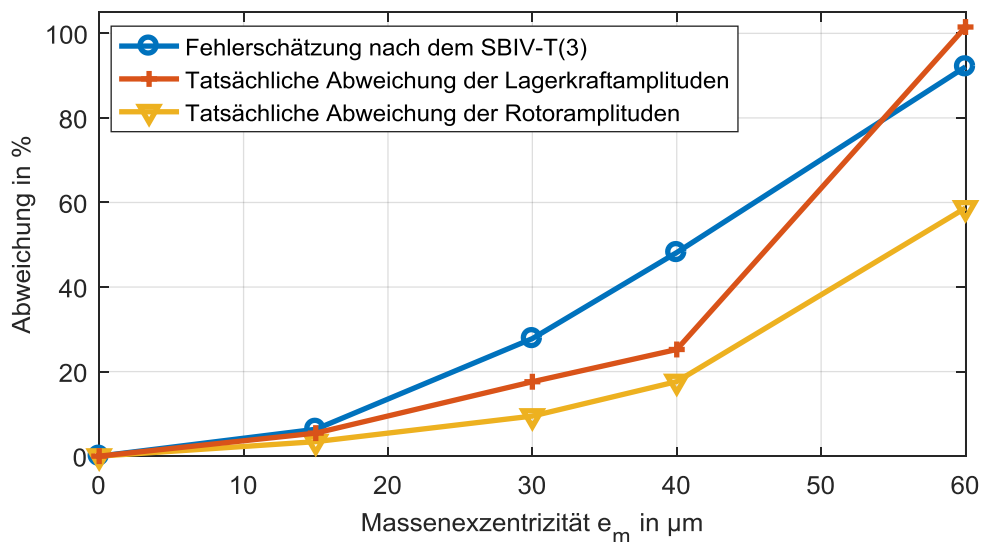


Abbildung 5.16: Maximale Abweichung von linearer und nichtlinearer Analyse im Bereich der Resonanz des Lavalläufer mit zwei 4-Kippsegmentlagern. Fehlerschätzung des SBIV-T(3) im Vergleich zur tatsächlichen Abweichung, ermittelt mit dem volldynamischen Kippsegmentlagermodell.

Die Störungsgleichungen berücksichtigen als Störungsparameter lediglich die Zapfenverlagerung, während alle anderen Feldgrößen, wie z. B. das Kavitationsgebiet als konstant angenommen werden. Insbesondere das Kavitationsgebiet kann sich je nach Segmentprofilierung mit der Zapfenverlagerung und -geschwindigkeit deutlich ändern. Wegen der untergeordneten Bedeutung des Kavitationsgebietes beim Kippsegmentlager, liefern die Koeffizienten höherer Ordnung in Verbindung mit dem SBIV insgesamt aussagekräftigere Ergebnisse als beim Festsegmentlager.

5.4 Approximation der kritischen Drehzahl vertikaler Maschinen

Ein Vorteil der linearen KC- oder KCM-Modellierung ist die einfache Trennung von Rotor- und Lagerberechnung. Die Lagereigenschaften können in Form der dynamischen Koeffizienten zwischen zwei Parteien ausgetauscht und interpretiert werden. Da Rotor- und Lagerberechnung oft nicht in einer Hand liegen, wird für die nichtlineare Beschreibung der Lagereigenschaften eine ähnliche Modellierung angestrebt, die es ermöglicht die Rotor- von der Lagerberechnung zu trennen.

Durch eine geeignete Formulierung der dynamischen Koeffizienten gelingt die Bestimmung der kritischen Drehzahl mittels linearer Rotordynamikanalysen. Die Methode setzt die Annahme voraus, dass sich der Zapfen näherungsweise auf einer Kreisbahn bewegt. Hierfür wird mit einem Lagerberechnungsprogramm eine kreisförmige Zapfenbahn vorgegeben und die Lagerkräfte werden berechnet. Abbildung 5.17 zeigt die Kräfte- und Geschwindigkeitsverhältnisse am Zapfen während einer kreisbahnförmigen Bewegung. In Abhängigkeit vom Bahnradius werden globale Koeffizienten gebildet. Diese besitzen die Eigenschaft, dass sie bei Vorgabe der Zapfenkraft die Bahnkurve reproduzieren können.

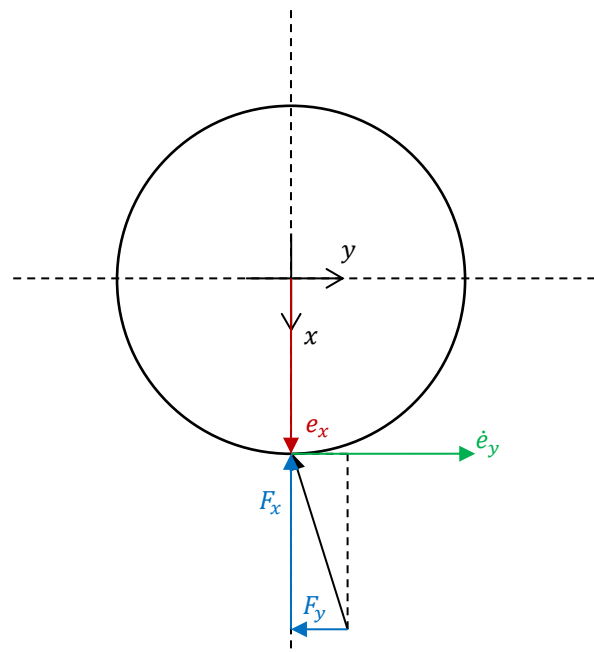


Abbildung 5.17: Momentaufnahme der Bewegungs- und Schmierfilmkräfteverhältnisse bei Bewegung des Zapfens auf einer Kreisbahn

Beim Kippsegmentlager ergeben sich die globalen Koeffizienten in dem skizzierten Betriebspunkt unter der Annahme verschwindender Koppelkoeffizienten zu:

$$k_{g,xx} = \frac{F_x}{e_x}, \quad k_{g,yx} = 0, \quad d_{g,yy} = \frac{F_y}{\dot{e}_y}, \quad d_{g,xy} = 0 \quad (5.18)$$

Damit sich der Rotor auf einer Kreisbahn bewegt, muss eine Invarianz der Koeffizientenmatrizen gegenüber Drehungen des Koordinatensystems um beliebige Winkel vorliegen:

$$\mathbf{K}_g = \mathbf{T}(\varphi) \mathbf{K}_g \mathbf{T}(\varphi)^T, \quad \mathbf{D}_g = \mathbf{T}(\varphi) \mathbf{D}_g \mathbf{T}(\varphi)^T, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad (5.19)$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix}$$

Aus Bedingung (5.19) folgt für die restlichen Koeffizienten:

$$k_{g,yy} = k_{g,xx}, \quad k_{g,xy} = -k_{g,yx}, \quad d_{g,xx} = d_{g,yy}, \quad d_{g,yx} = -d_{g,xy} \quad (5.20)$$

Die Koeffizienten werden für alle Punkte auf der Bahnkurve bestimmt und anschließend gemittelt. Abbildung 5.18 zeigt die mit dem volldynamischen Kippsegmentlagermodell ermittelten Steifigkeiten und Dämpfungen eines 8-Kippsegmentlagers (Lagervariante 1 aus Abschnitt 2.3.10) in Abhängigkeit der Drehzahl und des Zapfenbahnradius. Mit zunehmendem Bahnradius nimmt sowohl die Lagersteifigkeit als auch die Dämpfung zu. Weiter ist ersichtlich, dass die dimensionslose Steifigkeit bei geringen Drehzahlen mit dem Bahnradius stärker zunimmt. Die relative Änderung der Lagersteifigkeit gegenüber dem Lagerzentrum nimmt demnach mit der Drehzahl ab. Gleiches gilt auch für die dimensionslose Dämpfung.

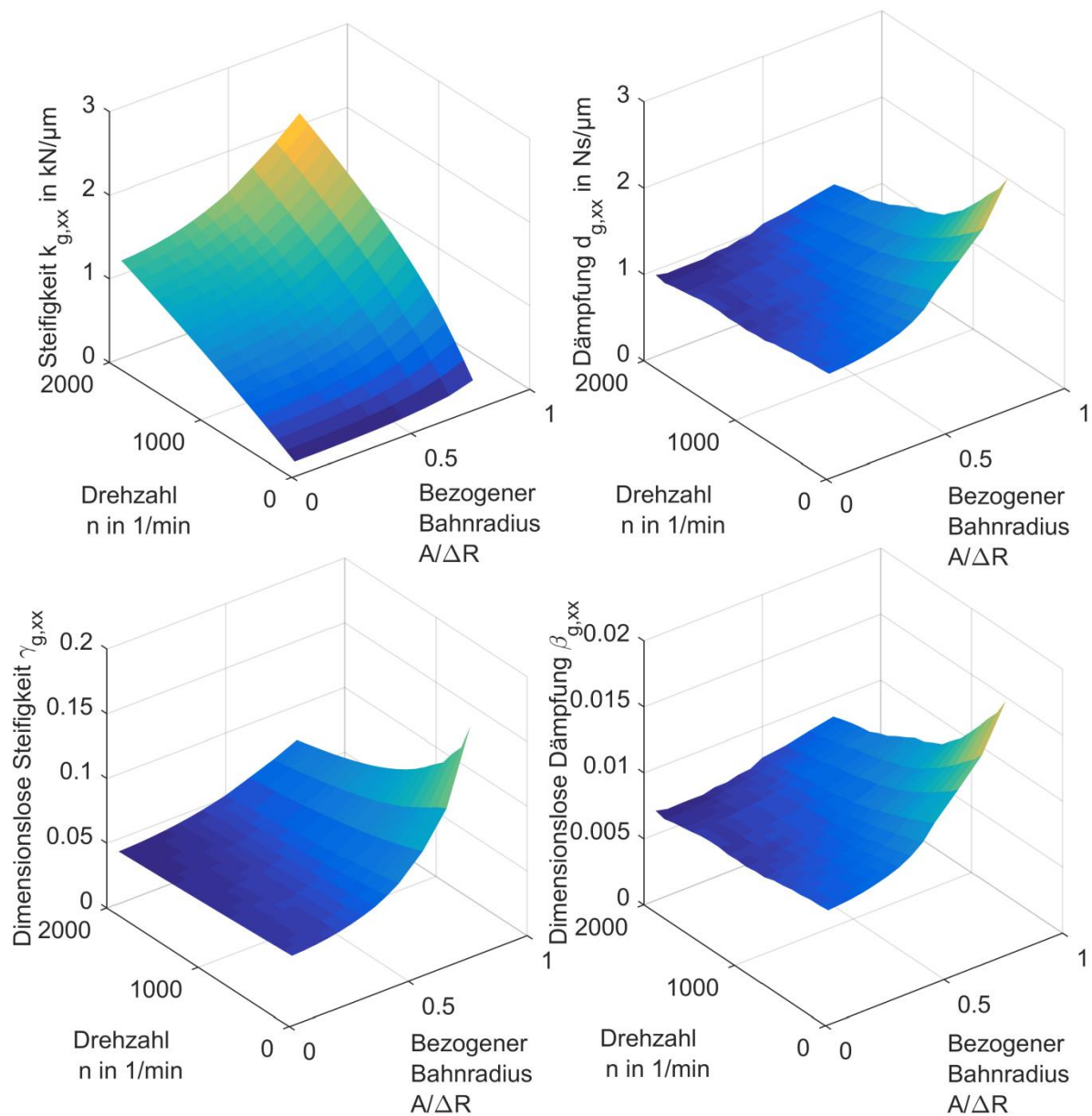


Abbildung 5.18: Globale Hauptsteifigkeits- und Dämpfungskoeffizienten des 8-Kippsegmentlagers bei einer drehzahlfrequenten und kreisförmigen Zapfenbahn, Oben: Dimensionsbehaftet, Unten: Dimensionslos $k = \gamma \cdot (2 \cdot B \cdot \eta \cdot \omega / \psi^3)$, $d = \beta \cdot (2 \cdot B \cdot \eta / \psi^3)$, Bahnradius bezogen auf das Lagerpiel ΔR

Die globalen Koeffizienten können nun in einer linearen Rotordynamikanalyse eingesetzt werden. Der grundsätzliche Ablauf ist hierfür in Abbildung 5.19 dargestellt. Da im Bereich der Resonanz zwei Lösungen existieren, wird bei Berechnung des Amplitudengangs im Sinne der Pfadverfolgung zuerst die Lösung bei der geringsten Drehzahl bestimmt. Hierbei wird eine lineare Rotordynamikanalyse unter Verwendung der Koeffizienten des Lagerzentrums durchgeführt, woraus sich die Zapfenbahnradien und die globalen Koeffizienten ergeben. Eine erneute Durchführung der linearen Rotordynamikanalyse mit den globalen Koeffizienten nach Gleichung (5.18)

und (5.20) liefert eine verbesserte Bahnkurve. Durch mehrmaliges, relaxiertes Wiederholen dieser Vorgehensweise konvergiert die Bahnkurve gegen einen Zustand, in dem die Lagerkräfte aus der linearen Rotordynamikanalyse mit den Lagerkräften der vorab berechneten Kreisbahn übereinstimmen und sich die Bahnkurven nicht weiter ändern. Ausgehend von dieser Lösung erfolgt die Berechnung des nächsten Drehzahlpunktes mit den Koeffizienten des vorher berechneten Drehzahlpunktes. Startet die Berechnung bei geringen Drehzahlen und wird schrittweise erhöht, spricht man von positiver Pfadverfolgung, und umgekehrt von negativer Pfadverfolgung.

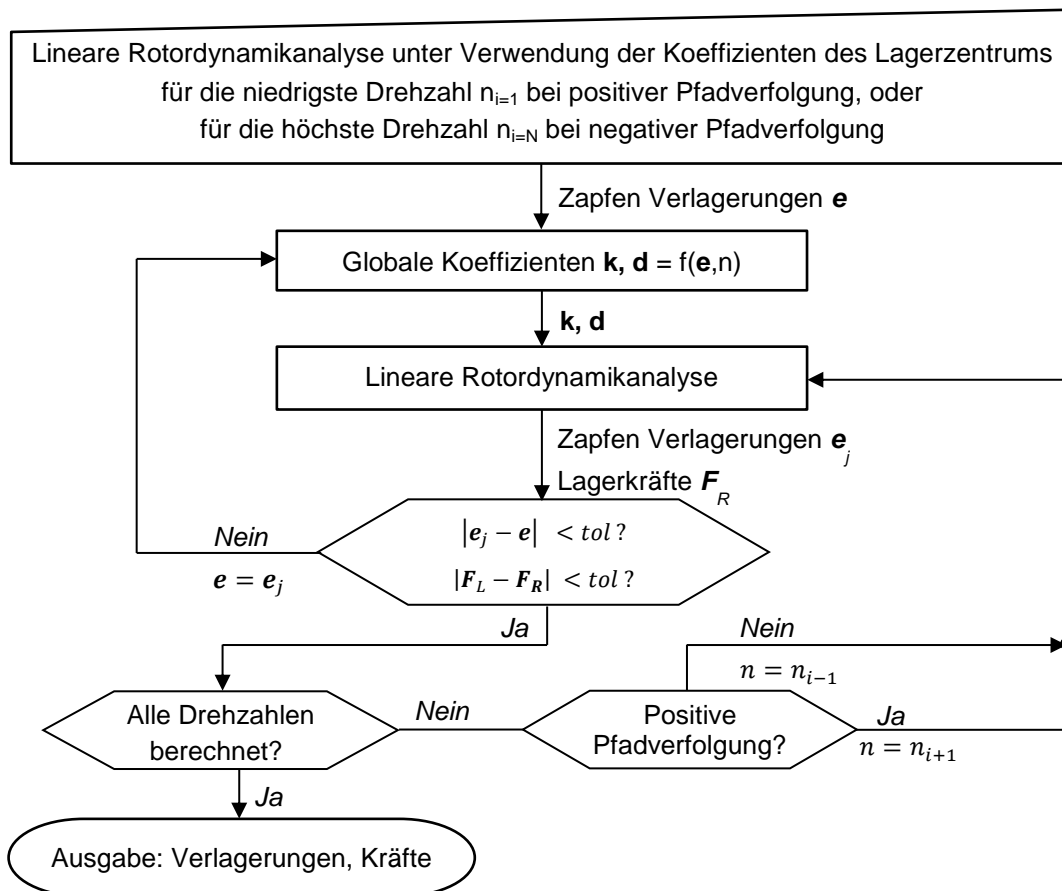


Abbildung 5.19: Flussdiagramm der iterativen Berechnung des Amplitudengangs unter Berücksichtigung der nichtlinearen Lagerkräfte mit Methoden der Theorie linearer Schwingungen, Bestimmung eines bestimmten Lösungsastes mittels Pfadverfolgung

Die so berechnete kritische Drehzahl ist in Abbildung 5.20 im Vergleich mit der nichtlinearen Lösung abgebildet, wobei die globalen Koeffizienten mit dem volldynamischen Kippsegmentlagermodell berechnet werden. Der Vergleich bezieht sich auf den Lavalläufer aus Abschnitt 2.3.10 mit Lagervariante 1. Beide Lösungsäste können sowohl in Amplitude als auch in Lage der kritischen Drehzahl mit sehr guter Näherung nachgebildet werden. Werden die globalen Koeffizienten stattdessen mittels

Störungsrechnung höherer Ordnung (SBIV-T(3)) gebildet, liegt keine genaue Übereinstimmung vor, jedoch ist das Verfahren für Abschätzungen gut geeignet. In Abbildung 5.20 ist hierfür zusätzlich der untere Lösungsast abgebildet, der sich mit den globalen Koeffizienten des SBIV-T(3) ergibt.

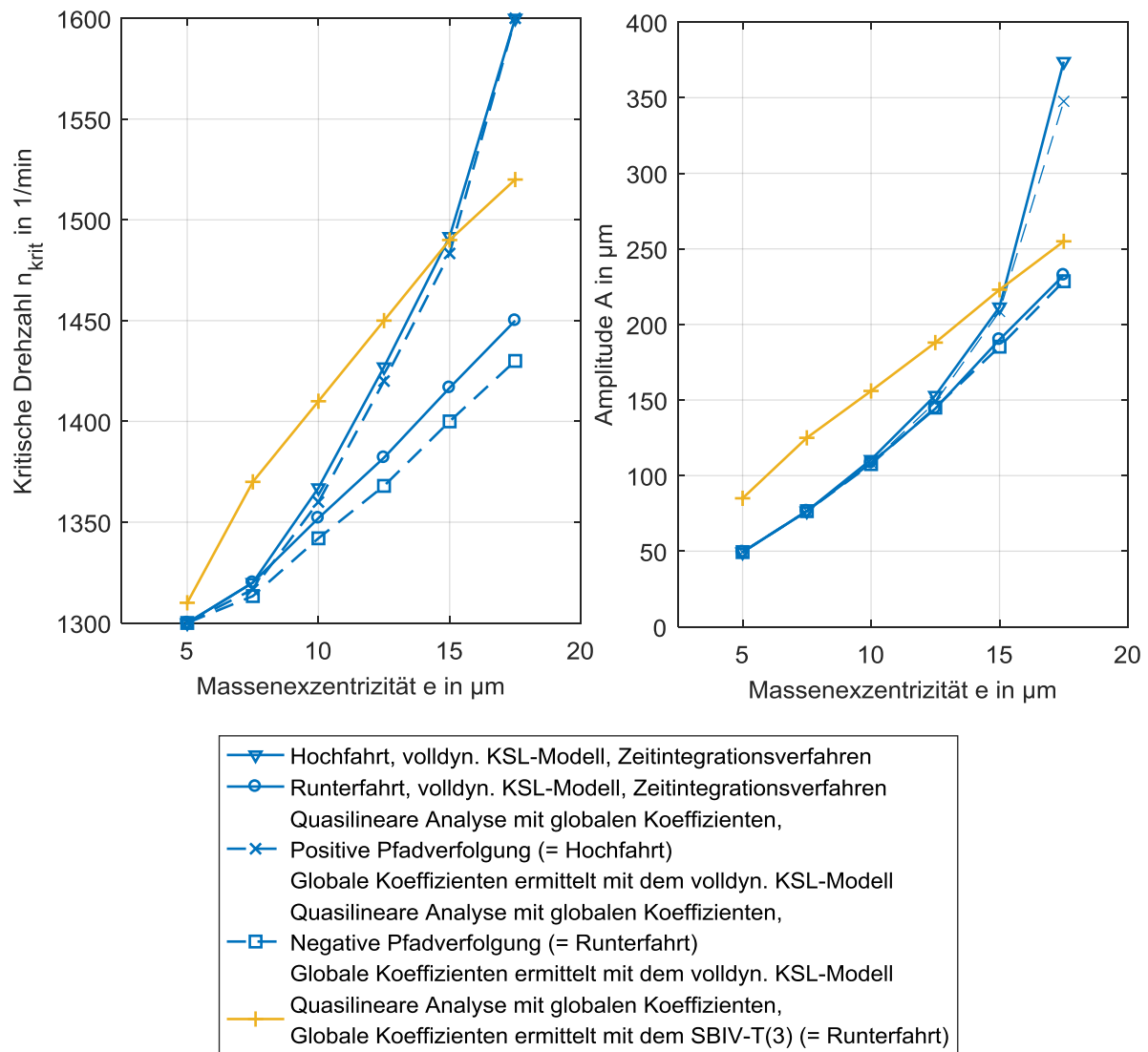


Abbildung 5.20: Approximation der kritischen Drehzahl unter Annahme einer kreisbahnförmigen Zapfenbahn (Quasilineare Analyse)

Durch eine Erhöhung der Taylorpolynom-Ordnung wird eine Verbesserung der Approximationsgüte erwartet.

Das Verfahren ähnelt der Vorgehensweise von *Merker* [3], bei dem das Kräftegleichgewicht von Rotor- und Lagerkräften ebenfalls iterativ ermittelt wird. Jedoch werden in [3] die Lagerkräfte als Funktion der Zapfenamplitude und nicht durch globale Koeffizienten ausgedrückt.

6. Beispiele ausgeführter Maschinen

6.1 Hydro-Kraftwerksanlage mit Francis-Turbine in 3-Lager Anordnung

Der Rotor einer beispielhaften Hydrokraftwerksanlage aus Abbildung 6.1 besteht aus einem Generator, der über eine lange, schlanke Zwischenwelle mit einer Francis-Turbine verbunden ist. Die Generatorwelle und die Turbine sind fest an die Zwischenwelle angeflanscht, wodurch eine Übertragung von Biegemomenten und Querkraften möglich ist. Der Rotor besitzt drei Radialkippssegmentlager, wobei sich eines über (NDE-Lager) und eines unter (DE-Lager) dem Generator befindet. Das dritte Lager ist in der Nähe des Turbinenrades angeordnet (TU-Lager). Die wichtigsten Rotor- und Lagerdaten sind in Tabelle 6.1 zusammengefasst.

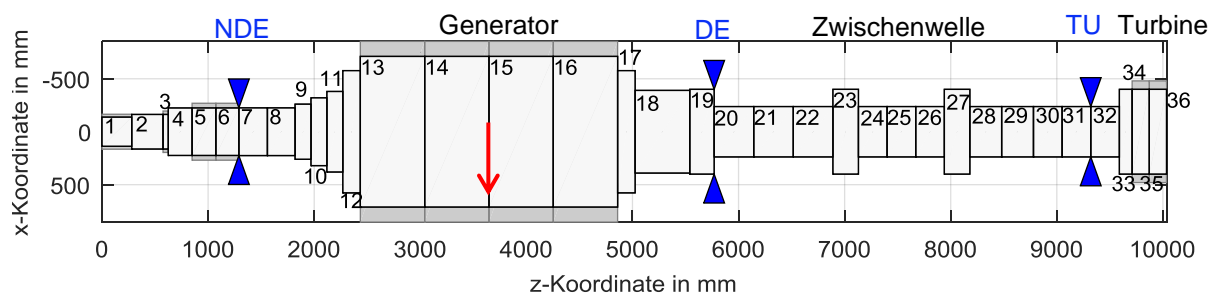


Abbildung 6.1: Vertikaler Hydrogenerator mit Francis-Turbine und Kippsegmentradialgleitlagern; Turbine und Generator sind durch eine Zwischenwelle verbunden (liegende Darstellung)

Tabelle 6.1: Rotor- und Lagerdaten einer Hydrokraftwerksanlage aus Abbildung 6.1

Tabelle 6.11: Rotor- und Lagerdaten einer 11-MW-Erdbildungsanlage des Abzuges 01			
Rotor			
Gesamtmasse m_{ges} in kg	≈ 70000		
Generatormasse m_{gen} in kg	≈ 60000		
Turbinenmasse m_{tur} in kg	≈ 6000		
Lagerabstand l_{la} (NDE-DE / DE-TU) in mm	≈ 4500 / 3500		
Gesamtlänge l_{ges} in mm	≈ 10000		
1. kritische Drehzahl in starren Lagern in 1/min	3344		
2. kritische Drehzahl in starren Lagern in 1/min	4810		
Magnetischer Zug in kN/mm (Verteilt über die wirksame Generatorlänge)	≈ 50		
Auswuchtgütestufe G in mm/s	6,3		
Lager	NDE	DE	TU
Anzahl Segmente	8	4	4
Lagerspiel ψ in ‰	0,2778	0,375	0,375
Profilierung ψ_v	32,67	2,33	2,33
Durchmesser D in mm	1080	800	800
Breite B in mm	170	210	210
Segmentumschließungswinkel in °	16	55	55
Abstützungsverhältnis Ω	0,5	0,5	0,5
Segment-Abstützungssteifigkeit $k_{ab,seg}$ in kN/μm	5	5	5
Lager-Abstützungssteifigkeit $k_{ab,lr}$ in kN/μm	2	3,33	1,25
Schmierfilmsteifigkeit bei Nenndrehzahl in kN/μm	≈ 1,3	≈ 1,3	≈ 1,3
Schmierstoff	ISO VG 46		
T_{zu} in °C	45		

Die Berechnung der zulässigen Restunwucht erfolgt mit der Auswuchtgütestufe für die jeweils einzelne Generator- und Turbinenmasse bei Nenndrehzahl.

Lineares Schwingungsverhalten

Für die lineare Analyse werden die um den statischen Betriebspunkt linearisierten, dynamischen Koeffizienten des Lagerzentrums verwendet. Die lineare Analyse des Rotor-Lager-Systems führt zu dem in Abbildung 6.2 abgebildeten Eigenverhalten. Der Verlauf der Eigenwerte ist in Abhängigkeit der Drehzahl in einem Campbell-Diagramm dargestellt. Die Eigenschwingungsformen im Bereich der ersten und zweiten kritischen Drehzahl sind als Bahnkurven entlang der Rotorlängsachse veranschaulicht. Die Bahnkurven sind mit einer Linie verbunden, um die Position des Rotors auf der Bahnkurve in einer Momentaufnahme kenntlich zu machen. Die Eigenschwingungsform der ersten kritischen Drehzahl besitzt die größten Amplituden im Bereich des Generators. Da in erster Linie die erste kritische Drehzahl von Interesse ist, erfolgen die folgenden Analysen ausschließlich unter Berücksichtigung einer Generatorunwucht. Die Unwucht-Schwingungen des linearisierten Systems sind in den Bode-Diagrammen in Abbildung 6.3 für die Auswuchtgütestufe G6,3 dargestellt. In Übereinstimmung mit dem berechneten Eigenverhalten wird durch die Generatorunwucht bevorzugt der Generatorteil inklusive der Generatorwellenlager DE und NDE angeregt, während die Amplituden an der Turbine um ein Vielfaches geringer als die Generatoramplituden ausfallen.

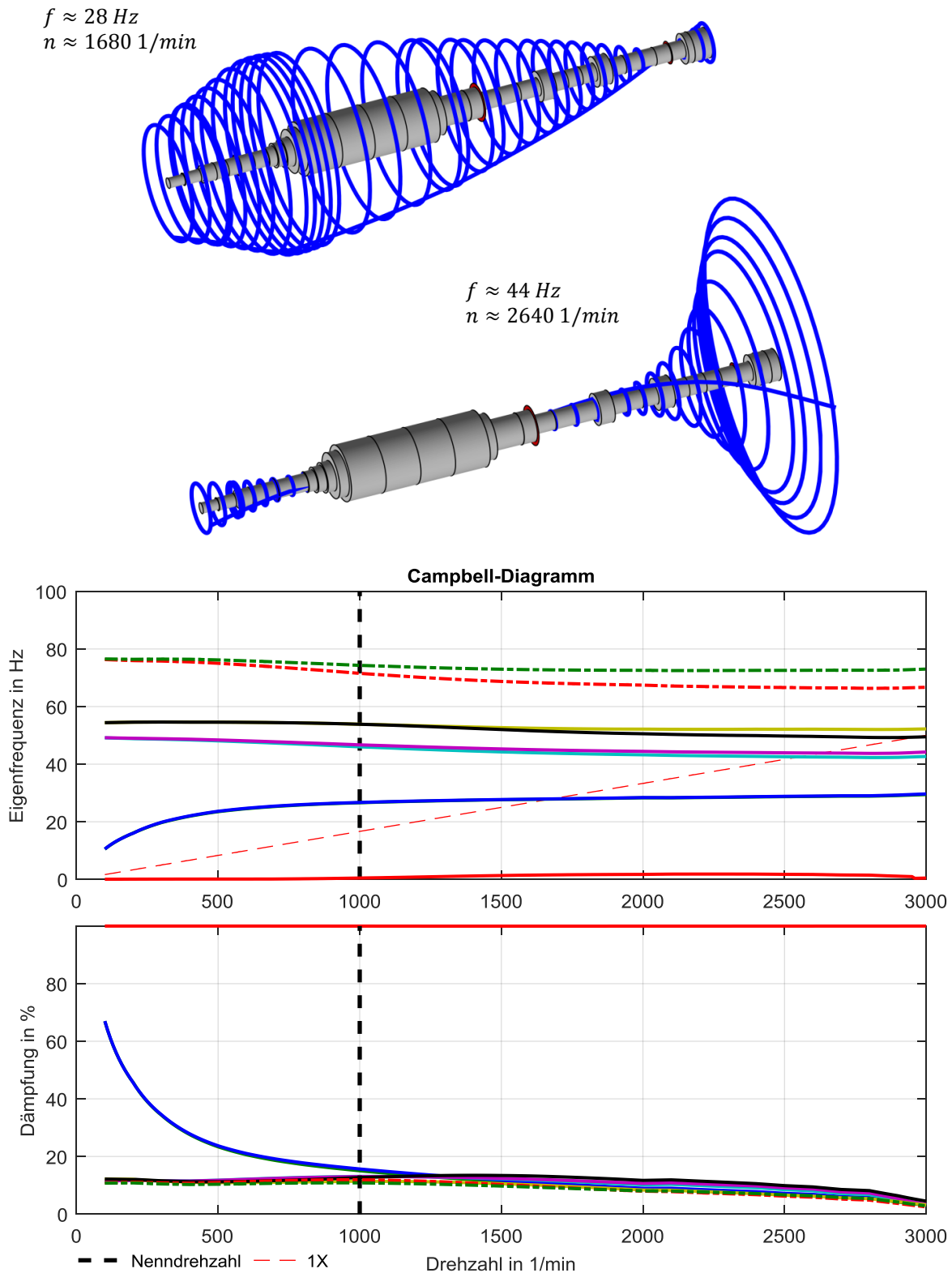


Abbildung 6.2: Eigenwerte des dreifach gelagerten Rotors aus Abbildung 6.1. Oben: Eigenschwingungsformen in der Nähe der ersten und zweiten kritischen Drehzahl, Unten: Campbell-Diagramm

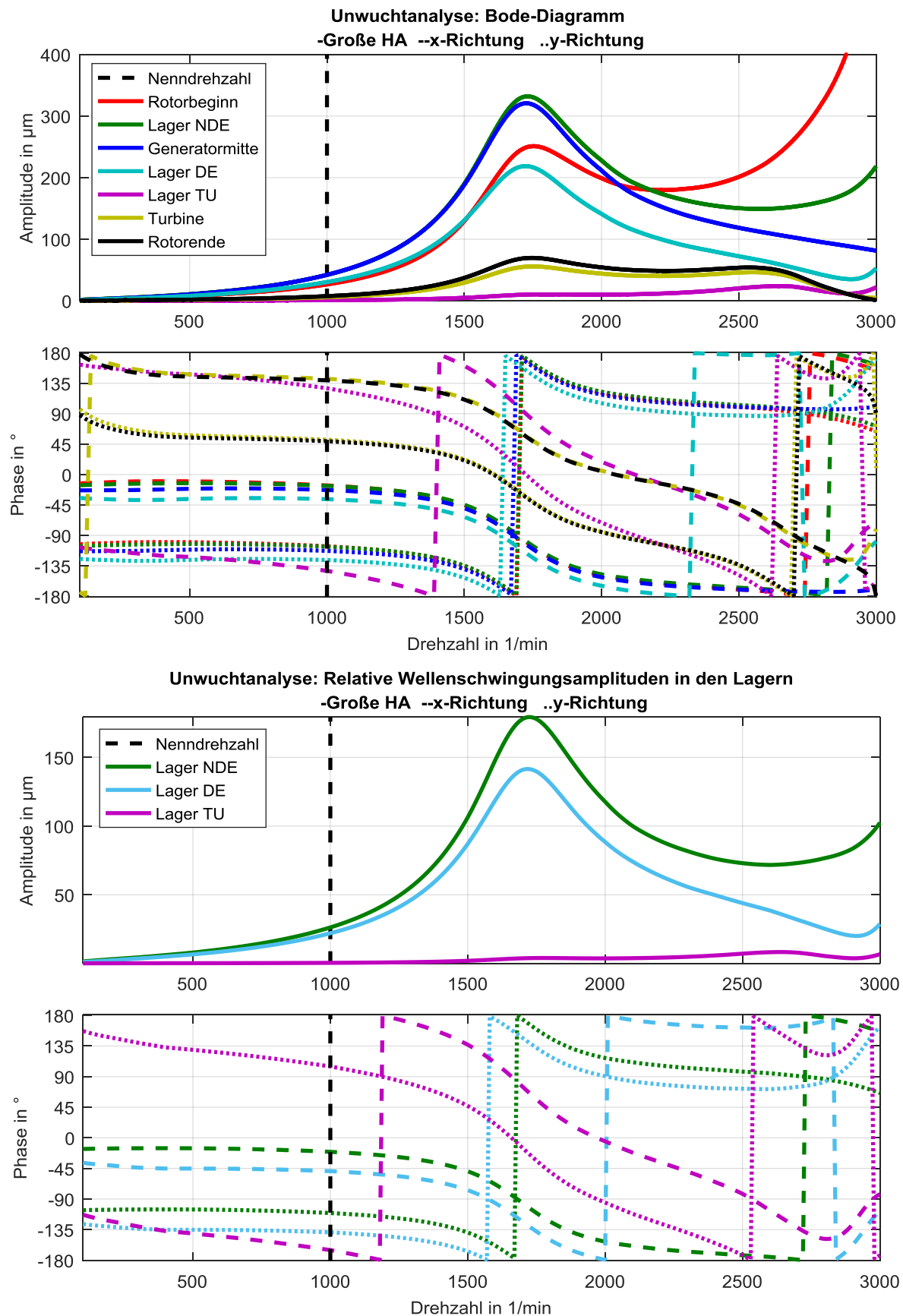


Abbildung 6.3: Bode-Diagramme des dreifach gelagerten Rotors aus Abbildung 6.1. Oben: Absolute Rotorschwingungen, Unten: Relative Wellenschwingungen in den Lagern. Unwuchtbetrag: 100 % G6,3

Schwingungsverhalten unter Berücksichtigung der nichtlinearen Lagerkräfte

Für die Berechnung der nichtlinearen Lagerkräfte kommt das volldynamische Kippsegmentlagermodell zum Einsatz. Die nichtlinear berechneten Amplitudengänge von Generator und Turbine sind in Abbildung 6.4, bzw. Abbildung 6.5 für verschiedene Unwuchtbeträge dargestellt. Hierbei bedeutet die Bezeichnung 25 % G6,3, dass der Unwuchtbetrag nur 25 % des maximal zulässigen Unwuchtbetrages der Auswuchtgütestufe G6,3 beträgt. Mit steigender Unwucht weichen die Resonanzamplituden von linearer und nichtlinearer Rechnung zunehmend voneinander ab und es kann eine zunehmende Hysterese der Schwingweiten bei der Resonanzdurchfahrt beobachtet werden.

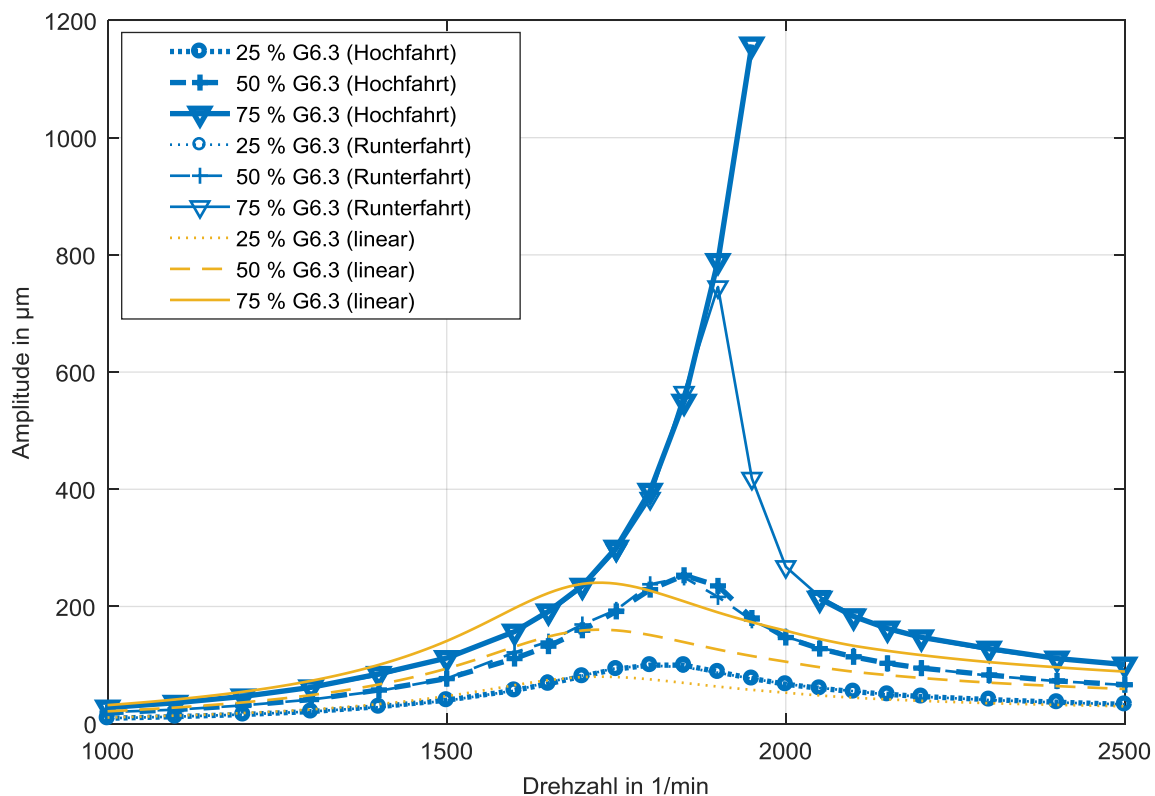


Abbildung 6.4: Nichtlinear berechnete Amplitudengänge der Generatormitte des dreifach gelagerten Rotors der Hydrokraftwerksanlage für verschiedene Unwuchtbeträge im Vergleich mit der linearen Analyse

Bei der Hochfahrt unter der Unwucht von 75 % G6,3 steigen die Resonanzamplituden so stark an, dass diese nicht mehr berechnet werden können. Ausgehend vom Generator-Resonanzmaximum der linearen Analyse ($n_{krit,lin} = 1730 \text{ 1/min}$) beträgt die maximal mögliche Anhebung der kritischen Drehzahl $\Delta n_{krit,max} \approx 21 \%$ ($n_{krit,max} = 2090 \text{ 1/min}$) bei vollständiger Versteifung aller Schmierfilme. Nach der nichtlinearen Berechnung beträgt die Anhebung der kritischen Drehzahl bei

75 % G6,3 etwa $\Delta n_{krit} \approx 16\%$. Hierfür wird die gerade nicht mehr berechenbare Drehzahl von $n_{krit} = 2000$ 1/min als Resonanzdrehzahl angesehen.

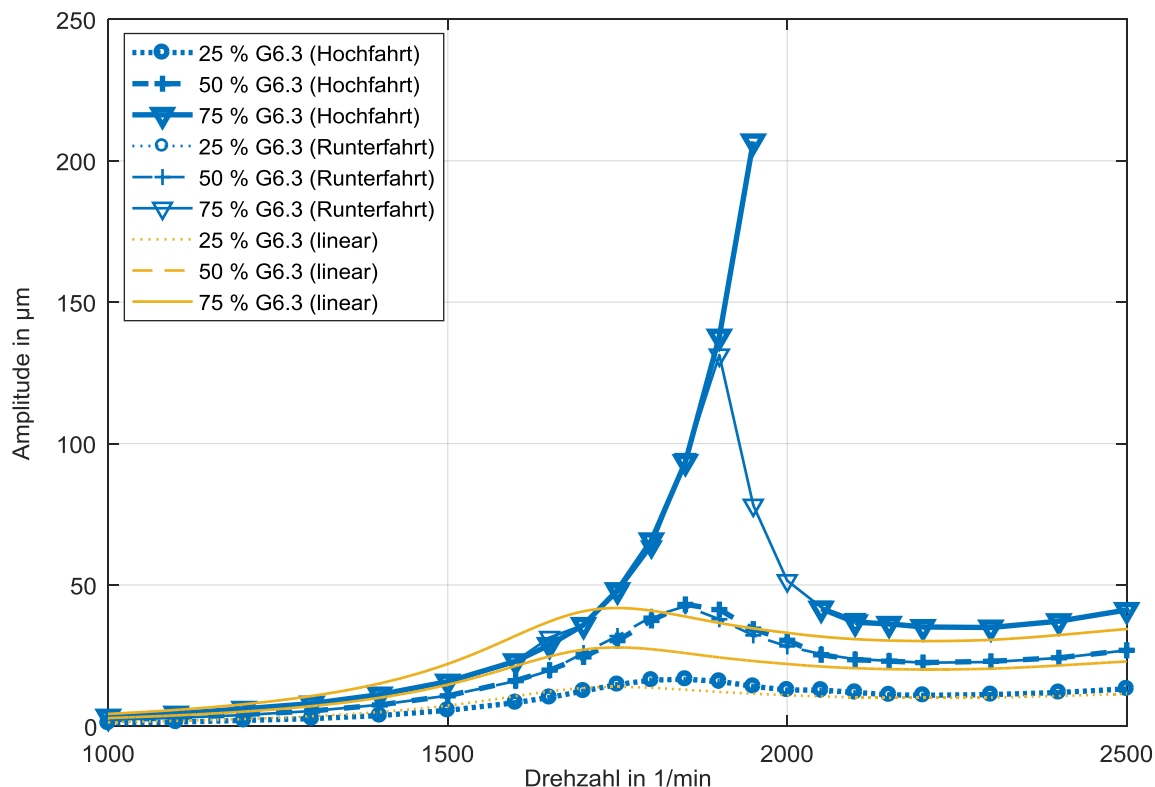


Abbildung 6.5: Nichtlinear berechnete Amplitudengänge der Turbine des dreifach gelagerten Rotors einer Hydrokraftwerksanlage für verschiedene Unwuchtbeträge im Vergleich mit der linearen Analyse

Die relativen Lagerschwingungsamplituden und die Lagerkraftamplituden sind für die Unwucht von 50 % G6,3 in Abbildung 6.6 dargestellt. Neben der nichtlinearen Lösung ist auch das Ergebnis der linearen Lösung abgebildet. Die relativen Lageramplituden beziehen sich auf die Relativbewegung zwischen Lager und Wellenzapfen. Die minimale Schmierpalthöhe kann deshalb aus diesen Amplituden lediglich abgeschätzt werden, da zusätzlich die Segmentbewegung zu berücksichtigen ist. Das Radialspiel aller Lager beträgt $\Delta R = 150 \mu m$ im Bereich der Segmentabstützungen. Der innere Spielkreis der Lager wird demnach nur zu etwa zwei Dritteln ausgenutzt. Größere Unterschiede beider Berechnungen treten vor allem bei den Lagerkräften im Bereich der Resonanz auf. Im unterkritischen Betrieb bleibt der Fehler der Kräfte noch gering.

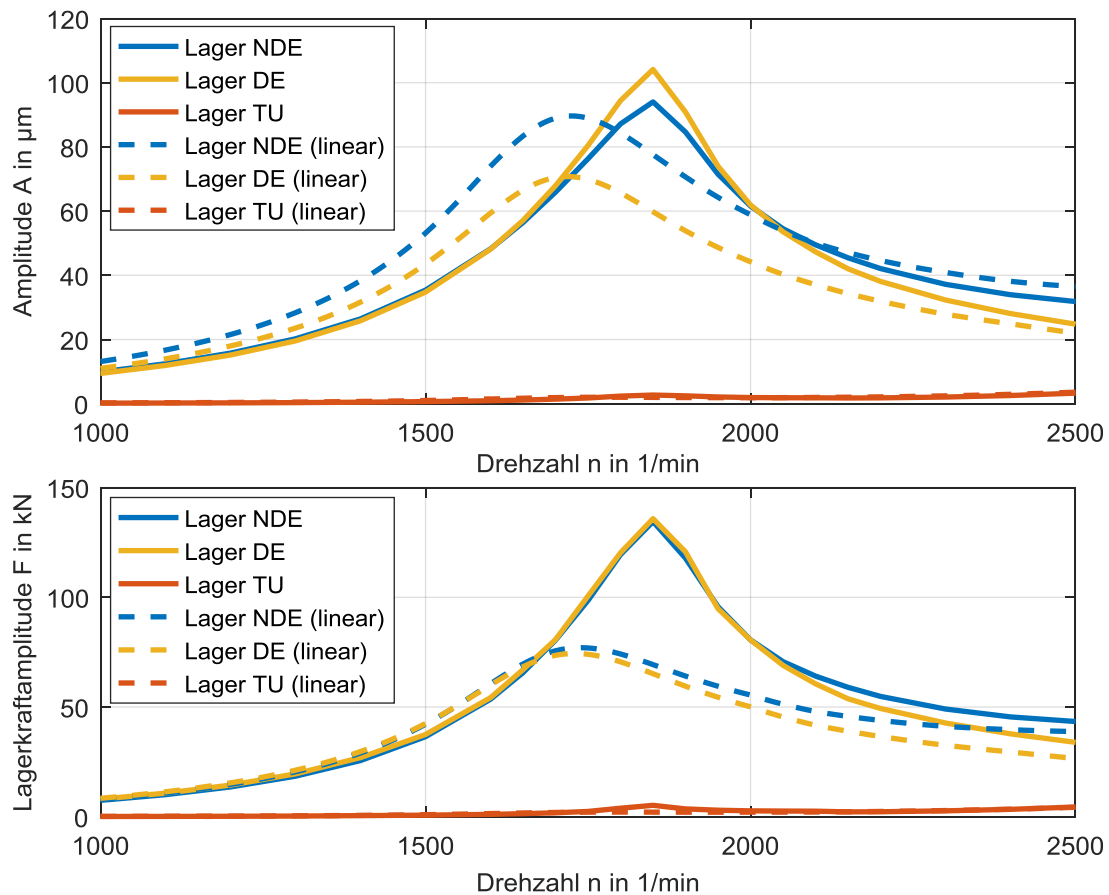


Abbildung 6.6: Relative Schwingungsamplituden in den Lagern (Oben) und Lagerkraftamplituden (Unten) für die Unwucht von 50 % G6,3

Abbildung 6.7 stellt die maximalen Resonanzamplituden der relativen Lagerschwingungen für verschiedene Unwuchtbeträge dar, wobei diese auf das Radialspiel bezogen sind. Außerdem sind die dabei auftretenden minimalen Schmier-spaltweiten, die mittleren, sowie die maximalen Schmierfilmdrücke abgebildet. Zum Vergleich sind zusätzlich die Ergebnisse des linearisierten Systems dargestellt. Die lineare Analyse liefert jedoch keine Aussage bezüglich der minimalen Spaltweite und des maximalen Schmierfilmdrucks. Für große Unwuchten können die relativen Lagerschwingungen aufgrund der Segmentbeweglichkeit größer als das Lagerspiel werden. Der mittlere Schmierfilmdruck ergibt sich aus den Lagerkräften, indem diese auf die projizierte Fläche bezogen werden: $p_q = F / (B \cdot D)$. Lineare und nichtlineare Analyse zeigen für alle Größen eine gute Übereinstimmung bis zu Unwuchten von ungefähr 25 % G6.3. Bei Unwuchten größer als 50% G6.3 steigen die Lageramplituden und Schmierfilmdrücke im Vergleich zur linearen Analyse überproportional stark an. Die maximalen Schmierfilmdrücke liegen für alle Unwuchten eine Größenordnung über den mittleren Schmierfilmdrücken.

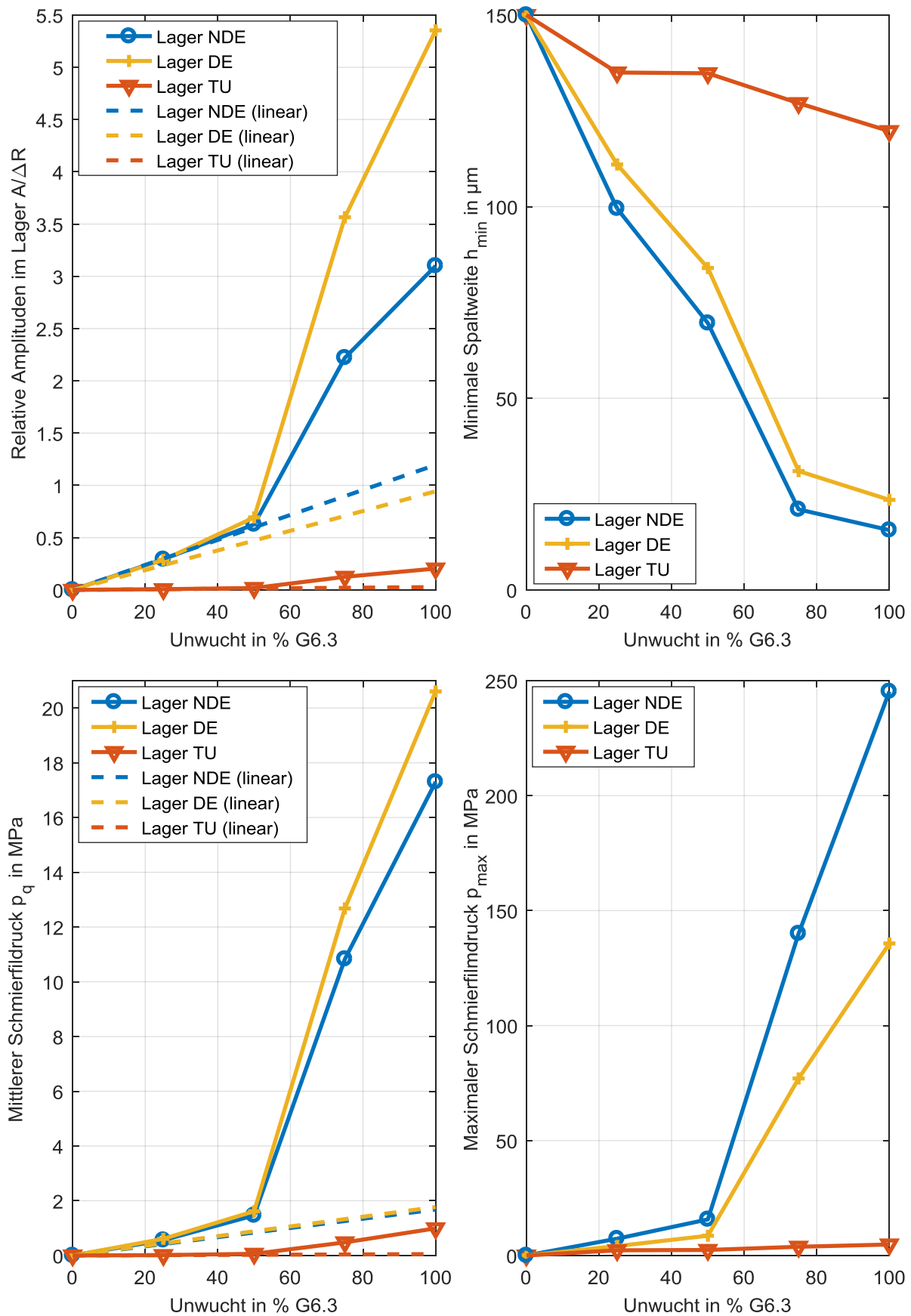


Abbildung 6.7: Lagerspezifische Kennwerte in der Resonanz für verschiedene Unwuchtbeträge. Oben: Relative Amplituden in den Lagern und minimale Spaltweiten; Unten: Mittlere und maximale Schmierfilldrücke

Magnetische Exzentrizität

Aufgrund einer nicht idealen Ausrichtung des Rotors im magnetischen Feld des Generators entsteht durch den magnetischen Zug eine statische Lagerlast. Das bedeutet, dass die Lagermittelpunkte der drei Lager zwar coaxial angeordnet sind, aber exzentrisch zur Mitte des Stators des Generators ausgerichtet sind, wodurch bereits bei zentrischer Lage des Rotors in den Lagern ein magnetischer Zug existiert. Abbildung 6.8 zeigt hierfür die Amplitudengänge des Generators für verschiedene Exzentrizitäten und den Unwuchtbetrag 50 % G6,3 des nichtlinearen Systems. Der zunehmende magnetische Zug bewirkt eine zunehmende Lagerlast und somit eine anisotrope Versteifung der Schmierfilme, deren Auswirkung im Amplitudengang beobachtet werden kann. Die Resonanz verschiebt sich zu höheren Drehzahlen, was im unterkritischen Betrieb zu einer Reduktion der Schwingweiten führt. Die Lager besitzen neben einer erhöhten Steifigkeit auch eine in ähnlichem Maße erhöhte Dämpfung. Da jedoch der Dämpfungsgrad mit der Steifigkeit abnimmt, kommt es zu einer stärkeren Resonanzüberhöhung. Aufgrund der entstehenden Lageranisotropie weichen die Bahnkurven mit zunehmender Exzentrizität von der Kreisbahn ab und die Schwingweiten in x- und y-Richtung unterscheiden sich.

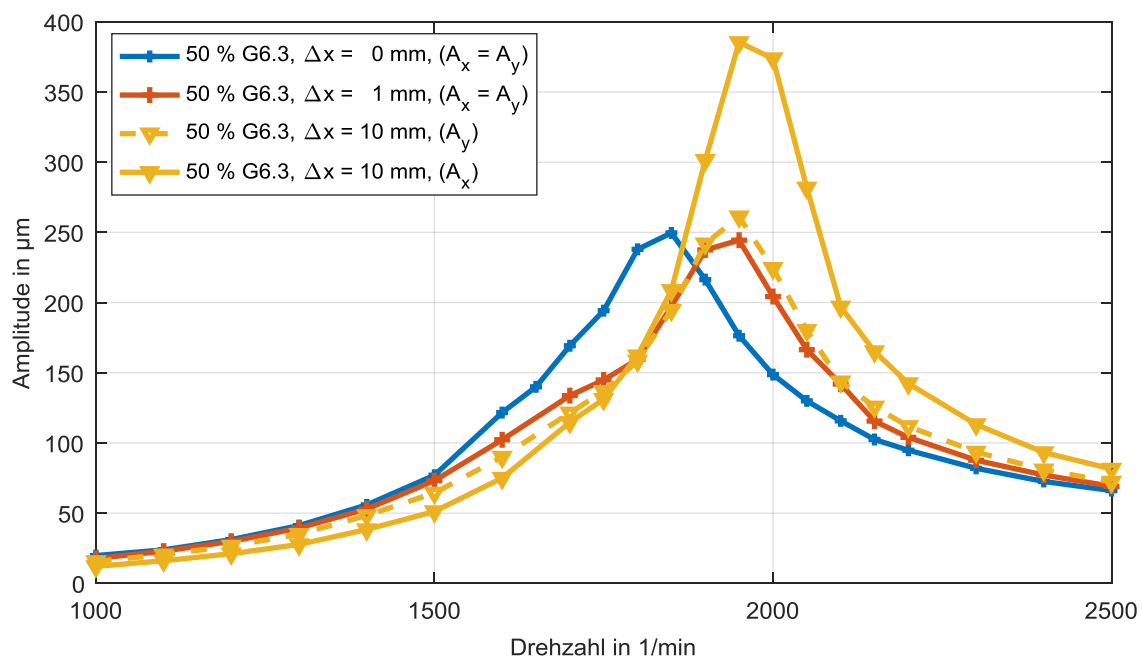


Abbildung 6.8: Nichtlinear berechnete Amplitudengänge der Generatormitte des dreifach gelagerten Rotors einer Hydrokraftwerksanlage in x- und y-Richtung, Exzentrische Ausrichtung des Rotors zum Stator des Generators, Variation der Exzentrizität $\Delta x = (0/1/10 \text{ mm})$

Gezielte Fehlausrichtung der Lagerstellen

Eine Möglichkeit dem Rotor-Lager-System eine statische Grundlast aufzuprägen stellt die gezielte Ausrichtung der Lagerstellen zueinander dar, was zu einer Verspannung des Systems führt. Hierzu wird z. B. das mittlere DE-Lager exzentrisch zu den beiden anderen Lagern verschoben. Solange sich die Verschiebung der Lagerstellen im Bereich des Lagerspiels bewegt, sind die Lager bei Stillstand der Maschine noch lastfrei. Aufgrund von regelmäßig auftretenden Anfahrvorgängen ist eine Ausrichtung über das Lagerspiel hinaus offensichtlich nicht zweckmäßig. Die Ausrichtung bewirkt aufgrund der Hydrodynamik eine drehzahlabhängige Lagerlast. Der Betrag dieser Lagerlast ist nicht von der Hydrodynamik allein, sondern auch in hohem Maße von der Rotor- und Lagerabstützungselastizität abhängig. Ein steif abgestütztes System entwickelt bei derselben Lagerausrichtung größere statische Kräfte als ein weicher abgestütztes System. Da die hier vorliegenden Reihenschaltungen von Rotor- und Lagerabstützungsteifigkeiten weich gegenüber den Schmierfilmen sind, können durch die Ausrichtung der Lager nur geringe statische Lasten erreicht werden. Abbildung 6.9 zeigt den Einfluss der Ausrichtung auf den Amplitudengang des Generators für die Unwucht 50 % G6,3, wobei das gesamte Summenspiel aller Lager ausgenutzt wurde.

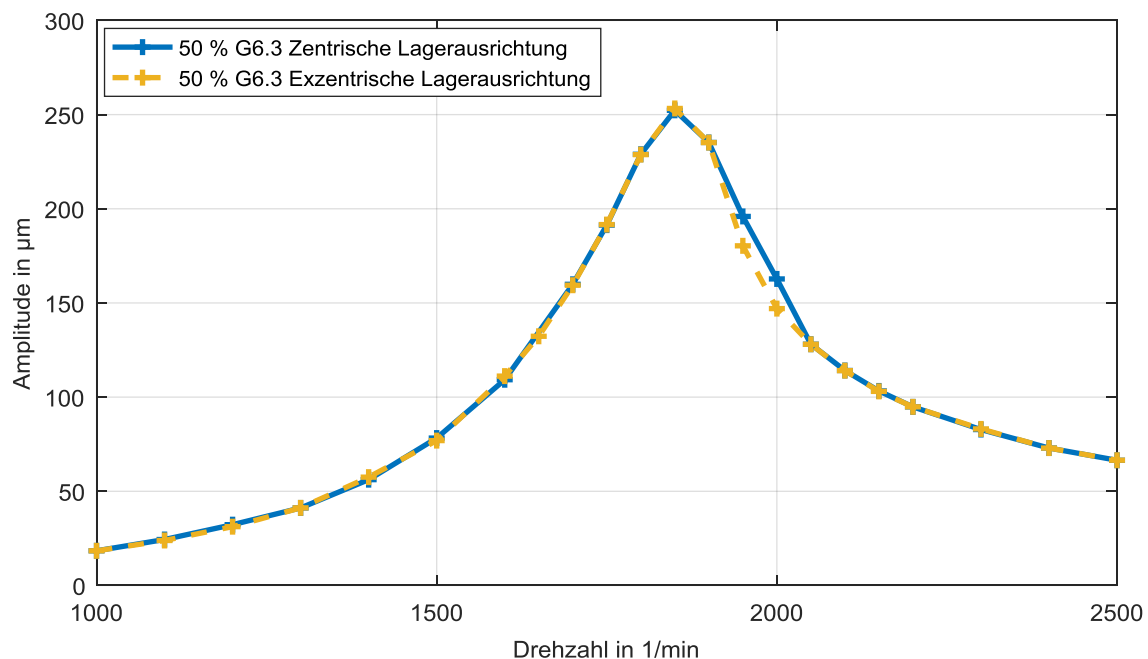


Abbildung 6.9: Einfluss der Lagerausrichtung auf die nichtlinear berechneten Amplitudengänge der Generatormitte des dreifach gelagerten Rotors einer Hydrokraftwerksanlage, Vergleich der zentrischen Lagerausrichtung (alle Lagermittelpunkte liegen auf einer Geraden) mit der exzentrischen Lagerausrichtung (alle Lager werden um ihr Radialspiel verschoben, wobei das mittlere DE-Lager in die entgegengesetzte Richtung verschoben wird)

Das bedeutet, dass der Rotor die Lager im Stillstand der Maschine gerade lastfrei berührt, was somit der praktisch relevanten, maximalen Verspannung entspricht. Der Einfluss auf den Amplitudengang ist vernachlässigbar gering und die maximal erreichte statische Lagerlast aufgrund der Verspannung beträgt $p_q \approx 0,1 \text{ MPa}$. Die Verspannung des Systems durch gezieltes Fehlausrichten der Lager führt bei dieser Maschine demnach zu keiner signifikanten Änderung des Schwingungsverhaltens.

Einfluss der mechanischen Segmentverformung und des Druckanstiegs am Segmentbeginn

Abbildung 6.10 zeigt den Einfluss der erweiterten Lagermodellierung auf den Amplitudengang des Generators. Die erweiterte Lagermodellierung berücksichtigt näherungsweise die mechanische Segmentverformung und den Druckanstieg am Segmentbeginn. Wie beim Lavalläufer aus Abschnitt 4.2.3 führt die Segmentverformung zu einer Reduzierung der Systemdämpfung und der Druckanstieg am Segmentbeginn zu einer Versteifung des Lagers. Beides führt zu einer Zunahme der Resonanzamplituden. Eine Verschiebung der kritischen Drehzahl tritt jedoch, unter Berücksichtigung beider Effekte, nur unwesentlich in Erscheinung.

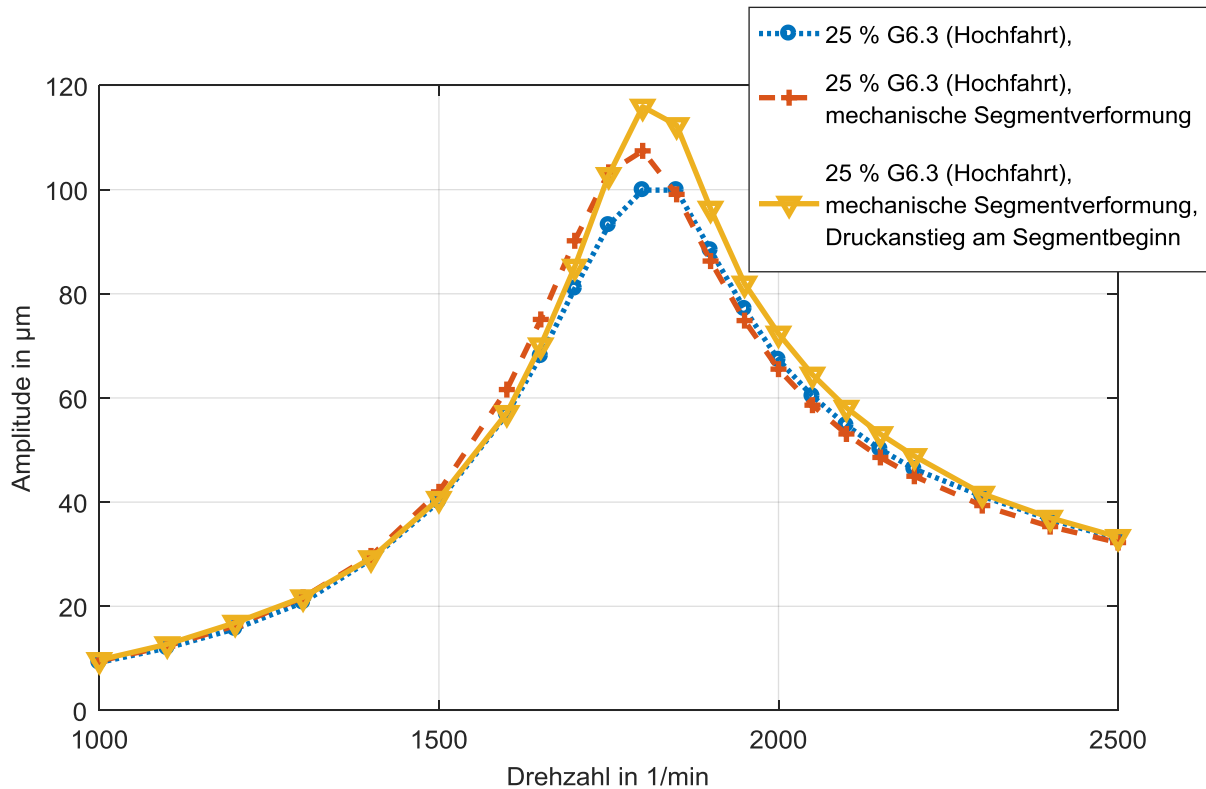


Abbildung 6.10: Einfluss der erweiterten Lagermodellierung auf die nichtlinear berechneten Amplitudengänge der Generatormitte des dreifach gelagerten Rotors einer Hydrokraftwerksanlage

Weiterführende Untersuchungen zum Einfluss der Lagerverspannung und des Axial-lagers

Da das Ausgangsmodell kaum auf eine statische Lagerverspannung anspricht, werden sowohl die Lagerabstützungssteifigkeit als auch die Wellensteifigkeit angehoben. Hierbei handelt es sich um eine theoretische Studie, um den Effekt besser einschätzen zu können. Dabei wird nicht darauf eingegangen, wie eine Wellenversteifung des konkret vorliegenden Modells tatsächlich umgesetzt werden könnte. In Abbildung 6.11 sind die Amplitudengänge der Varianten im verspannten und unverspannten Zustand mit Angabe der statischen Grundlast dargestellt. Die Untersuchung erfolgt mit dem volldynamischen Kippsegmentlagermodell. Die Verspannung des Systems erfolgt stets durch den Versatz der Lager um das gesamte Lagerspiel, was dem maximal sinnvollen Lagerversatz entspricht. Der Versatz ist am mittleren DE-Lager entgegen dem Versatz der beiden anderen Lager gerichtet. Bei Stillstand der Maschine liegt demnach noch keine statische Grundlast vor. Mit steigender Hydrodynamik entsteht im Betrieb eine zunehmende statische Lagerpressung. Die Rotorwelle der Ausgangsvariante reagiert bei einem radialen Versatz des mittleren Lagers gegenüber den anderen Lagern mit einer Steifigkeit von $k_w = 0,1134 \text{ kN}/\mu\text{m}$ und ist demnach eine Größenordnung weicher als die Lagerabstützung. Gegenüber der Ausgangsvariante besitzt die erste Variante eine unendlich steife Lagerabstützung $k_{ab,lr} \rightarrow \infty$, wodurch eine statische Lagerpressung von ungefähr $p_q \approx 0,1 \text{ MPa}$ entsteht. Im Amplitudengang hat diese geringe spezifische Lagerbelastung kaum Auswirkung, da aufgrund der weichen Welle nur eine geringe Pressung entstehen kann. Variante 2 besitzt deshalb zusätzlich zur steifen Abstützung eine 10-fach steifere Welle, wodurch die Steifigkeit in der Größenordnung der Abstützungssteifigkeit liegt und am mittleren Lager eine statische Pressung von über $p_q > 1 \text{ MPa}$ entsteht. Im Amplitudengang führt dies zu etwas geringeren Amplituden in Richtung der Verspannung (x-Richtung) und zu einer stärkeren Resonanzüberhöhung. In der dritten Variante liegt eine 50-fach steifere Welle gegenüber der Ausgangsvariante vor, wodurch der Effekt nochmals zunimmt. Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass ein gezieltes Ausrichten der Lager das Systemverhalten theoretisch beeinflussen kann, der Effekt im unterkritischen Bereich jedoch gering und daher bei üblichen Konstruktionen kaum zu beobachten ist.

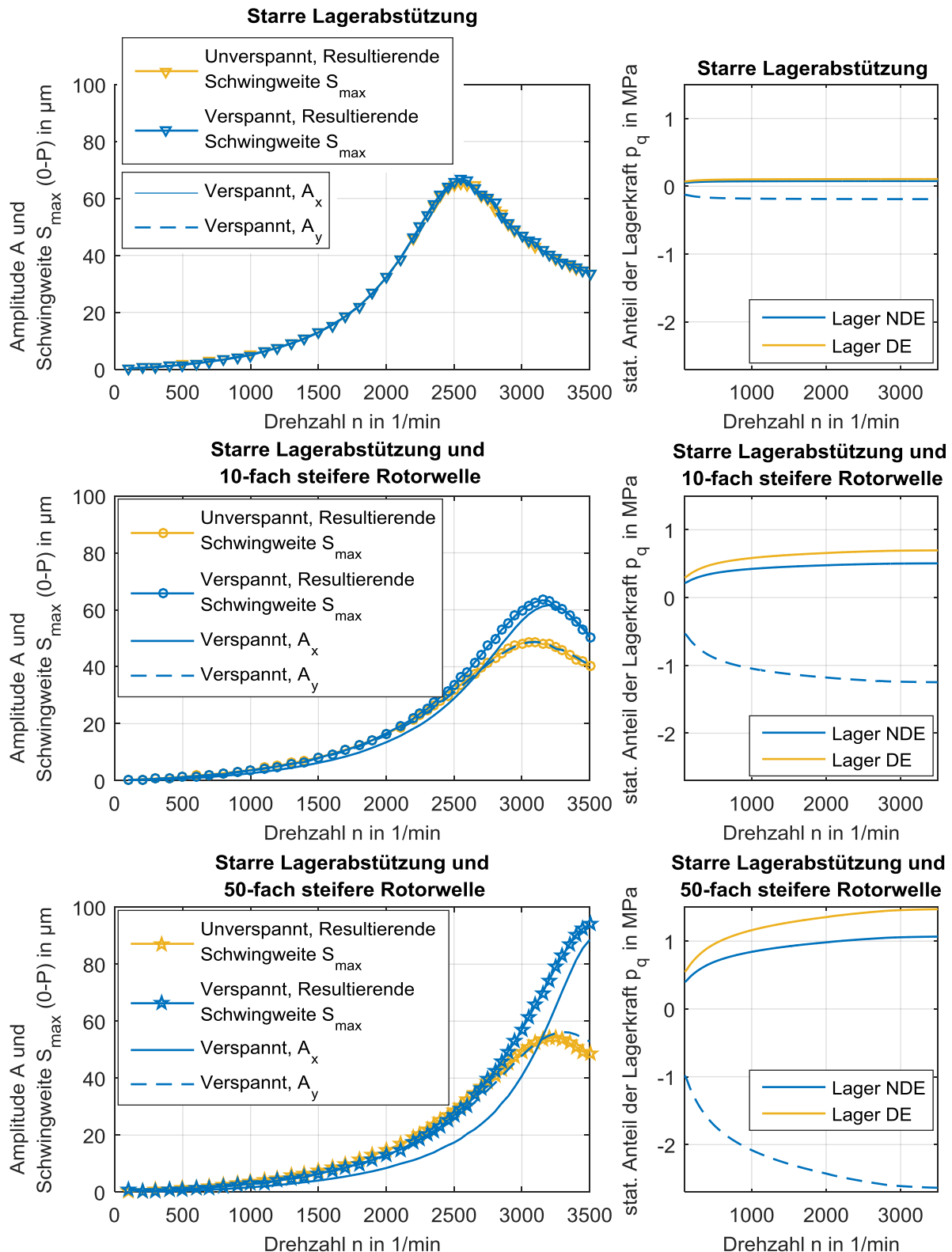


Abbildung 6.11: Einfluss einer Wellenverspannung durch einen Lagerversatz auf den Amplitudengang von Varianten der Generatormitte des Rotors aus Abbildung 6.1 und dabei statisch wirksame Lagerbelastung aufgrund der Verspannung; Oben: Unendlich steife Lagerabstützung ($k_{ab,lr}$), Mitte: Unendlich steife Lagerabstützung und zusätzlich 10-fach steifere Rotorwelle, Unten: Unendlich steife Lagerabstützung und zusätzlich 50-fach steifere Rotorwelle; Unwuchtbetrag 25% G6.3

Einfluss des Axiallagers

Das axiale Kippsegment-Traglager der Maschine ist in der Nähe des oberen NDE-Führungslagers (Knoten $k = 8$) platziert (Konfiguration 1). Bei manchen Konstruktionen kann das Axiallager in der Nähe des unteren Generatorlagers (DE-Lager) angeordnet sein, weshalb auch diese Konfiguration untersucht wird. Tabelle 6.2 fasst alle relevanten Axiallagerparameter zusammen.

Tabelle 6.2: Axiallagerdaten des Rotors aus Abbildung 6.1

Geometriedaten		Schmierstoffdaten	
Segmentanzahl	8	Schmierstoff	ISO VG 46
Innenradius R_i in mm	285	Zuführüberdruck in bar	0
Außenradius R_a in mm	540	Zuführtemperatur in °C	45
Segmentumschließungswinkel φ_{ta} in °	36		
Segmentabstützungssteifigkeit $k_{seg,Ax}$ in kN/mm der punktförmigen Abstützung	380		

Ähnlich wie beim Versatz der Radiallager bestimmen die mit dem Schmierfilm in Reihe geschalteten Elastizitäten, ob signifikante Rückstellkräfte entstehen können. Deshalb erfolgt die Untersuchung der beiden Konfigurationen mit Berücksichtigung der Segmentabstützungselastizität sowie unter Annahme einer unendlich steifen Abstützung. Abbildung 6.12 zeigt den Einfluss des Axiallagers auf den Amplitudengang für die verschiedenen Konfigurationen. Der Rotor und die Radiallager inklusive deren Abstützungen entsprechen dabei stets dem Ausgangsmodell. Für beide Konfigurationen kann unter Berücksichtigung der Segmentabstützungselastizität kaum ein Einfluss beobachtet werden. Die unendlich steif abgestützte Konfiguration 2 bewirkt eine signifikante Reduzierung der Amplituden. Auch zum Einfluss des Axiallagers lässt sich zusammenfassend feststellen, dass der Effekt bei üblichen Konstruktionen in der Regel vernachlässigt werden kann.

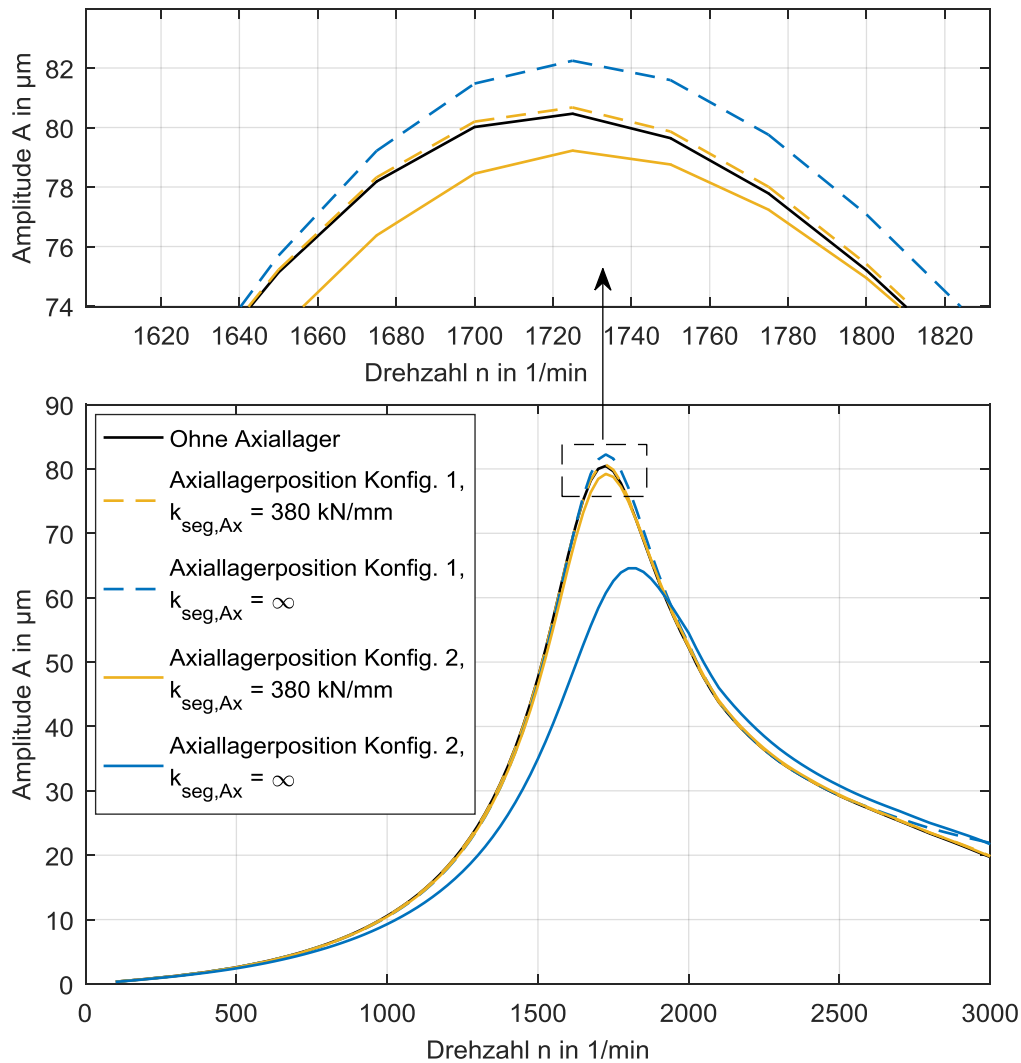


Abbildung 6.12: Lineare Analyse des Einflusses des Axiallagers auf die radialen Generatorschwingungen des Rotors aus Abbildung 6.1 bei unterschiedlichen Axiallagerkonfigurationen; Position Konfiguration 1: Das Axiallager befindet sich in der Nähe des NDE-Lagers am Knoten 8, Position Konfiguration 2: Das Axiallager befindet sich in der Nähe des DE-Lagers am Knoten 19; Der Einfluss beider Konfigurationen ist jeweils für elastisch und starr abgestützte Segmente dargestellt

6.2 Hydro-Kraftwerksanlage mit Pelton-Turbine und Kippsegmentlagern

Das Simulationsmodell einer Hydro-Kraftwerksanlage, bestehend aus einem Generator und einer Pelton-Turbine, ist in Abbildung 6.13 für eine gleichphasige Unwuchtkonfiguration dargestellt. Der Generator befindet sich in etwa mittig zwischen den zwei radialen Führungslagern. Die Führungslager sind als Kippsegmentlager mit jeweils sechs Segmenten ausgeführt. Die Rotor- und Lagerdaten sind in Tabelle 6.3 zusammengefasst.

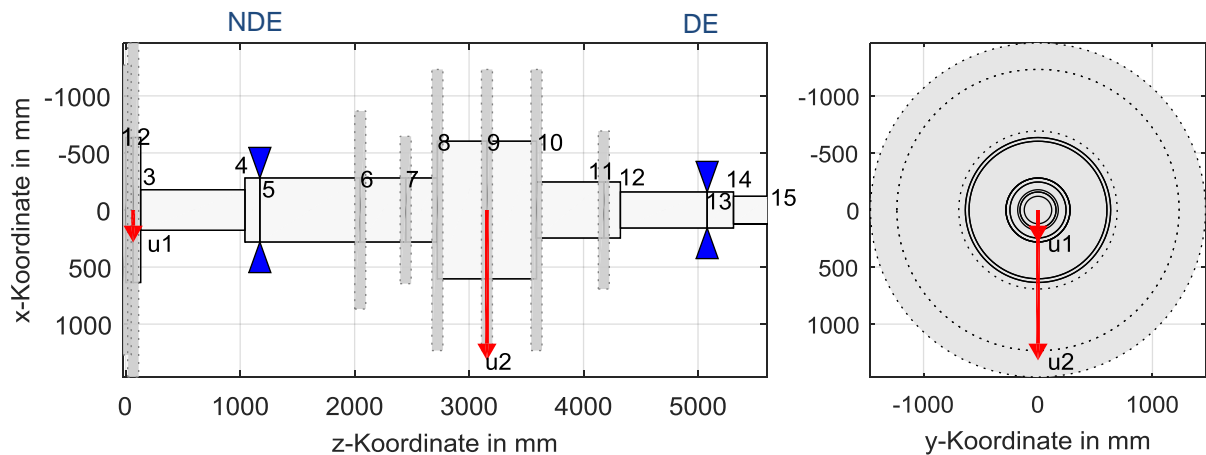


Abbildung 6.13: Vertikaler Hydrogenerator mit Pelton-Turbine und Kippsegmentradialgleitlagern (liegende Darstellung)

Tabelle 6.3: Rotor- und Lagerdaten der Hydrokraftwerksanlage aus Abbildung 6.13

Rotor		
Gesamtmasse m_{ges} in kg	≈ 22000	
Generatormasse m_{gen} in kg	≈ 12000	
Turbinenmasse m_{tur} in kg	≈ 1400	
Lagerabstand l_{la} in mm	3900	
Gesamtlänge l_{ges} in mm	5600	
Kritische Drehzahl in starren Lagern in 1/min	2169	
Radialkraft im 1-düsigen Betrieb in kN	77	
Radialkraft im 5-düsigen Betrieb in kN	0	
Magnetischer Zug in kN/mm (Verteilt über die wirksame Generatorlänge)	-0,8	
Auswuchtgütestufe G in mm/s	6,3	
Lager	DE	NDE
Anzahl Segmente	6	6
Lagerspiel ψ in ‰	0,56	0,56
Profilierung ψ_v	1,957	2,0
Durchmesser D in mm	560	500
Breite B in mm	140	140
Dichtstegbreite B_{DS} in mm	2	2
Relatives Spiel im Dichtstegbereich ψ_{DS} in ‰	4,189	2
Segmentumschließungswinkel in °	35	35
Abstützungsverhältnis Ω	0,5	0,5
Segment-Abstützungssteifigkeit $k_{ab,seg}$ in kN/ μ m	0,75	0,5
Lager-Abstützungssteifigkeit $k_{ab,lr}$ in kN/ μ m	7,5	0,747
Schmierstoff		
$\eta(T = 40\text{ °C})$ in mPas	42,3	
$\eta(T = 100\text{ °C})$ in mPas	7,2	
T_{zu} in °	56,8	

Je nach Betriebszustand wird die Turbine von ein bis fünf Düsen angestrahlt. Die Düsen sind gleichmäßig über den Umfang des Laufrades verteilt, so dass im 5-düsigen Betrieb die resultierende Radialkraft verschwindet. Im 1-düsigen Betrieb ist die Radialkraft dagegen maximal. Im Generatorbetrieb existiert außerdem ein magnetischer Zug, der durch eine lineare Kraft-Auslenkungs-Charakteristik berücksich-

tigt wird. Aufgrund der größeren Masse beträgt die zulässige Restunwucht des Generators ein Vielfaches derjenigen des Turbinenlaufrades. Die relative Winkellage beider Unwuchten zueinander besitzt deshalb nur wenig Einfluss auf den Amplitudengang und es werden nur die Ergebnisse der gleichphasigen Konfiguration gezeigt. Eine etwaige Momentenunwucht des Generators wird nicht betrachtet.

Lineare Analyse

Die Campbell- und Bode-Diagramme der linearen Analysen sind in Abbildung 6.14 für den 5-düsigen und in Abbildung 6.15 für den 1-düsigen Betrieb dargestellt. Diese werden jeweils mit den Koeffizienten des statischen Betriebspunktes berechnet. Da im 5-düsigen Betrieb näherungsweise kreisförmige Bahnkurven vorliegen, werden zur übersichtlicheren Darstellung nur die großen Halbachsen abgebildet. Die größten Amplituden in der kritischen Drehzahl werden im Bereich der Generatormitte registriert (Knoten $k = 9$). Die kritische Drehzahl ändert sich nur wenig mit der statischen Last, sie liegt im 5-düsigen Betrieb bei ca. $n_{krit} = 1450 \text{ 1/min}$ und im 1-düsigen Betrieb aufgrund des steiferen Schmierfilmes etwas höher bei $n_{krit} = 1490 \text{ 1/min}$. Die Resonanz-Amplituden verhalten sich dagegen sehr sensitiv auf Änderungen der statischen Last. Im 1-düsigen Betrieb fallen die Amplituden gegenüber dem 5-düsigen knapp 300 % größer aus, was vor allem der geringeren Dämpfung des entsprechenden Eigenwertes zuzuschreiben ist.

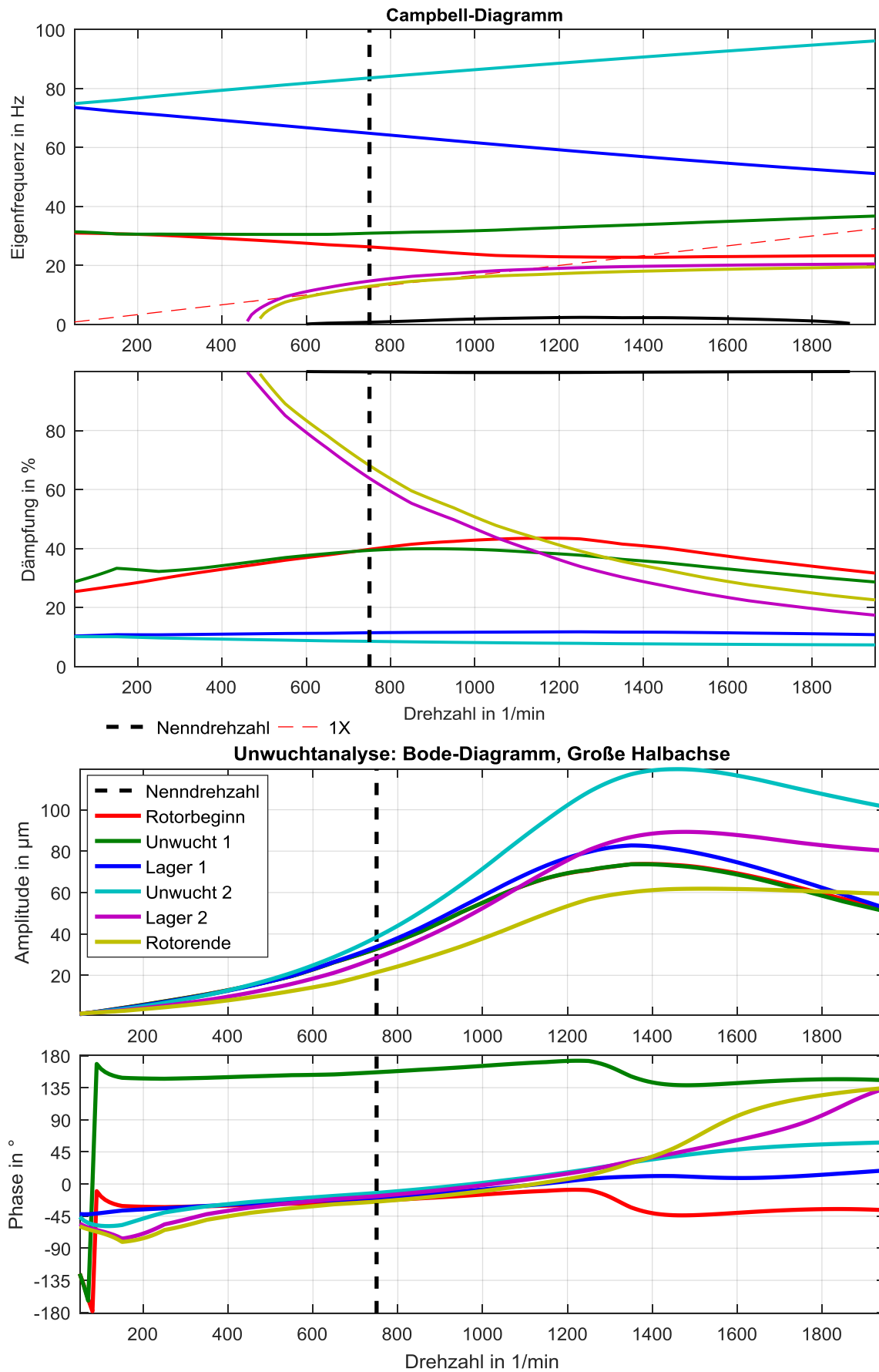


Abbildung 6.14: Campbell-Diagramm und Bode-Diagramm des Hydrogenerators bei minimaler Radiallast im 5-düsigen Betrieb, Auswuchtgütestufe G6,3, gleichphasig, lineare Analyse

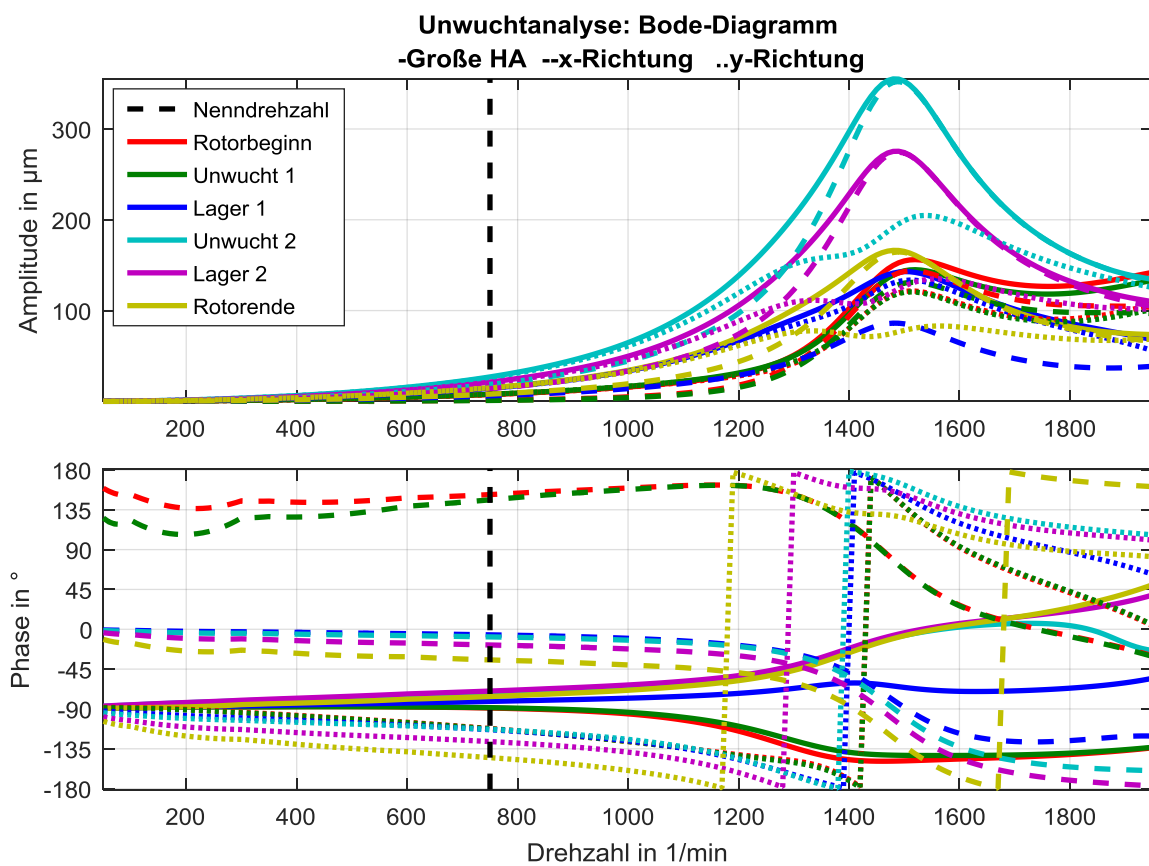
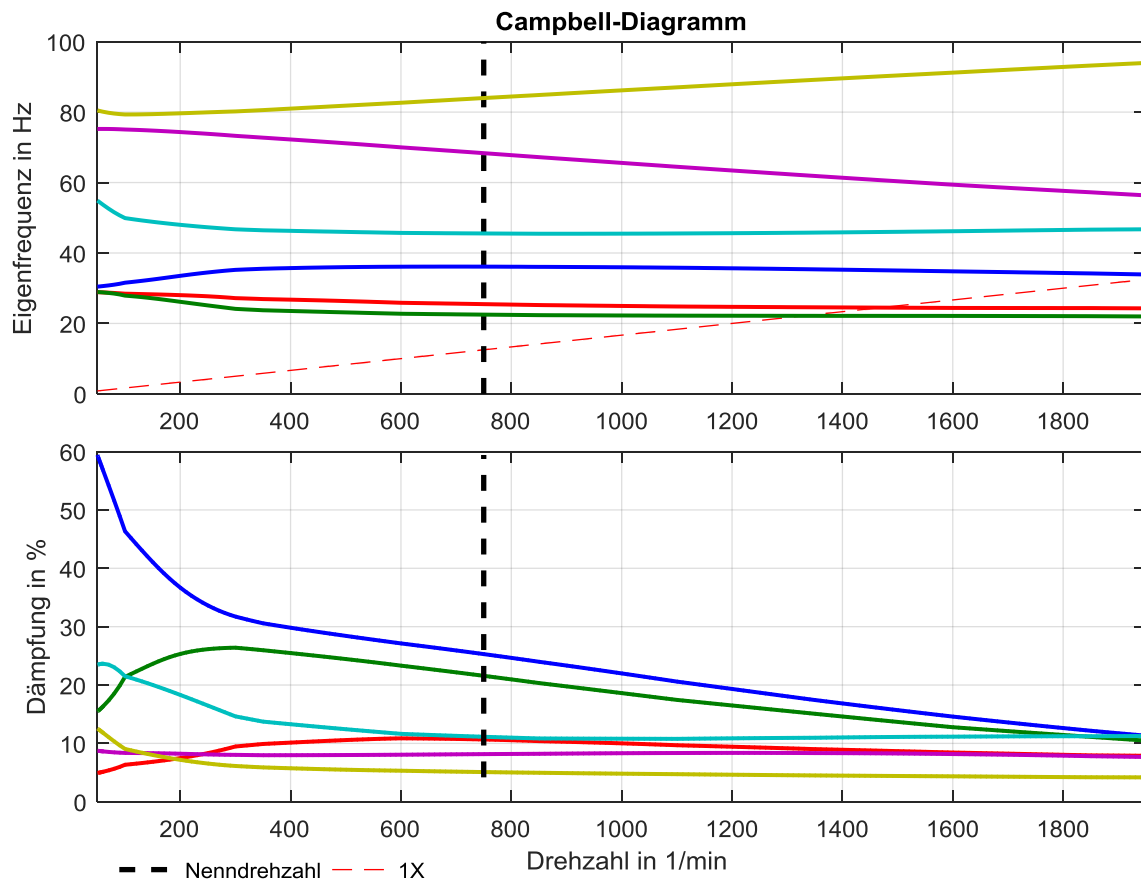


Abbildung 6.15: Campbell-Diagramm und Bode-Diagramm des Hydrogenerators bei maximaler Radiallast im 1-düsigen Betrieb, Auswuchtgütestufe G6,3, gleichphasig, lineare Analyse

Nichtlineare Analyse

Abbildung 6.16 zeigt die Schwingweiten der Generatormitte (Knoten $k = 9$) unter Berücksichtigung der nichtlinearen Lagerrückstellkräfte des volldynamischen Kippsegmentlagermodells im Vergleich mit den linearen Analysen. Da das nichtlineare Verhalten zur Unwucht nicht proportional ist, erfolgt eine Variation der Unwucht im Rahmen der spezifizierten Wuchtgüte. Neben dem vollständigen Ausnutzen der Wuchtgüte (100 % G 6,3) wird der Unwuchtbetrag auf 75 % und 50 % verringert. Bei vollständiger Versteifung der Schmierfilme ergibt sich nach der linearen Theorie eine kritische Drehzahl von $n_{krit} \approx 1675 \text{ 1/min}$. Die maximal mögliche Erhöhung der kritischen Drehzahl beträgt demnach ca. 14 %. Wie die nichtlineare Berechnung zeigt, verändert sich die kritische Drehzahl im Rahmen der spezifizierten Wuchtgüte praktisch nicht, allerdings steigen die Amplituden gegenüber der linearen Berechnung überproportional mit der Unwucht an. Die Amplituden stimmen für die Unwucht 50 % G 6,3 gut überein, weichen jedoch mit steigender Unwucht zunehmend voneinander ab. Mit steigender Unwucht bildet sich auch die Hysterese beim Durchfahren der Resonanz sichtbar aus. Das nichtlineare Näherungsverfahren nach Abschnitt 5.2 zeigt ähnliche Tendenzen bezüglich der überproportionalen Amplitudenzunahme mit steigender Unwucht, jedoch ist diese schwächer ausgeprägt als beim volldynamischen Kippsegmentlagermodell. Die Hysterese der Resonanzdurchfahrt ist beim Näherungsverfahren kaum sichtbar. Im 1-düsigen Betrieb und der größten Unwucht wachsen die Amplituden in der Resonanz so stark an, dass diese nicht mehr berechnet werden können.

Einfluss der elastischen Segmentverformung und des Druckanstiegs am Segmentbeginn

Abbildung 6.17 vergleicht den Amplitudengang der Unwucht 75 % G 6,3 mit den Amplitudengängen der erweiterten Lagermodellierung. Die mechanische Segmentverformung führt zu einer Herabsetzung der Systemdämpfung, wie Abbildung 6.17 zeigt. Der Effekt fällt jedoch gering aus. Durch die zusätzliche Berücksichtigung des Druckanstiegs am Segmentbeginn kann eine Amplitudenerhöhung von ca. $\Delta S_{max} \approx 20 \%$ beobachtet werden. Die Lösungen für die Hoch- und Runterfahrt sind identisch und es kann keine Hysterese beobachtet werden.

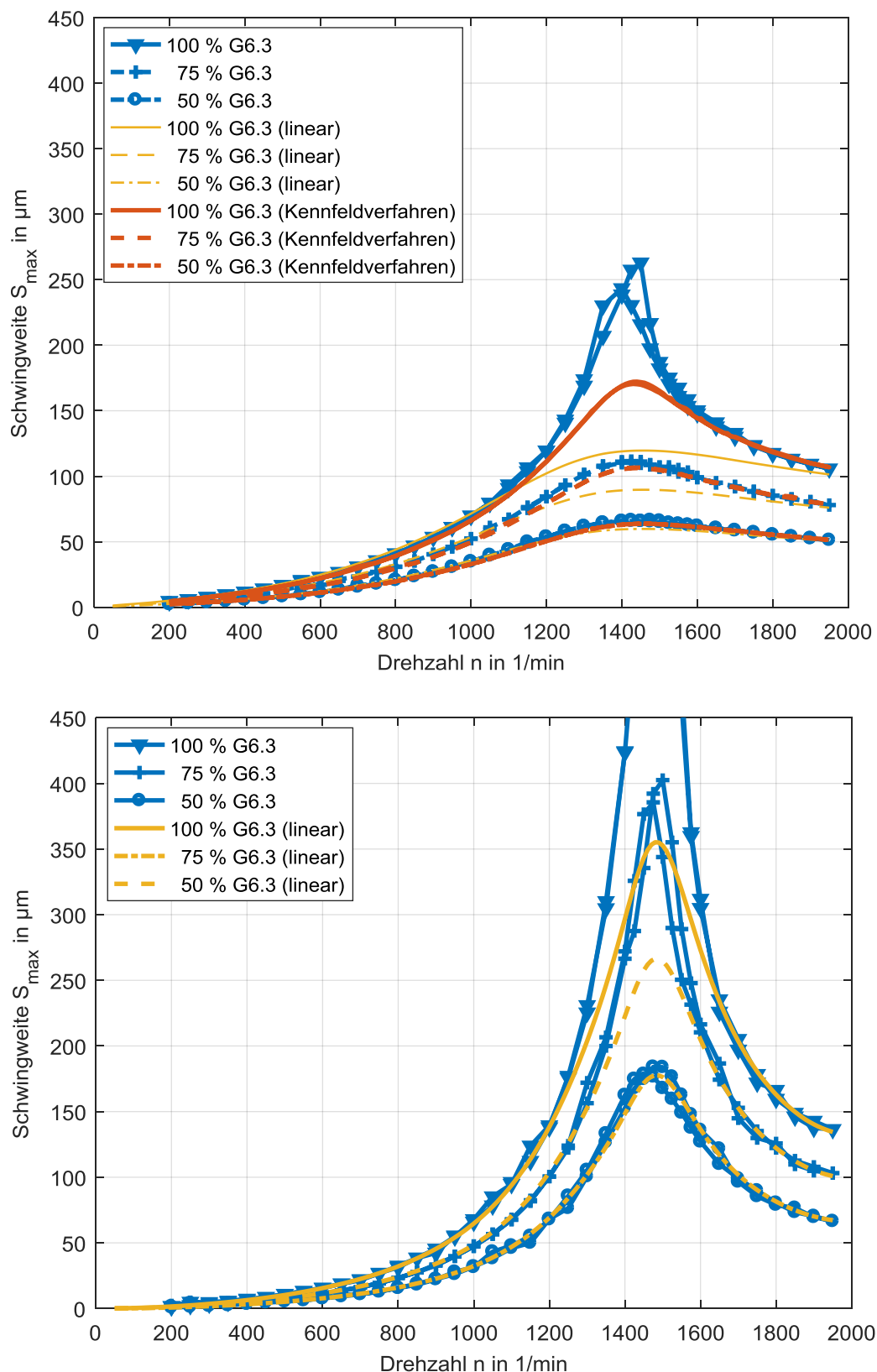


Abbildung 6.16: Schwingweiten der Generatormitte des Hydrogenerators; Vergleich verschiedener Berechnungsverfahren: Volldynamisches KSL-Modell, Nichtlineares Kennfeld-Näherungsverfahren und lineares Lagermodell; Auswuchtgütestufe G 6,3, gleichphasig; Oben: minimale Radiallast im 5-düsigen Betrieb; Unten: maximale Radiallast im 1-düsigen Betrieb

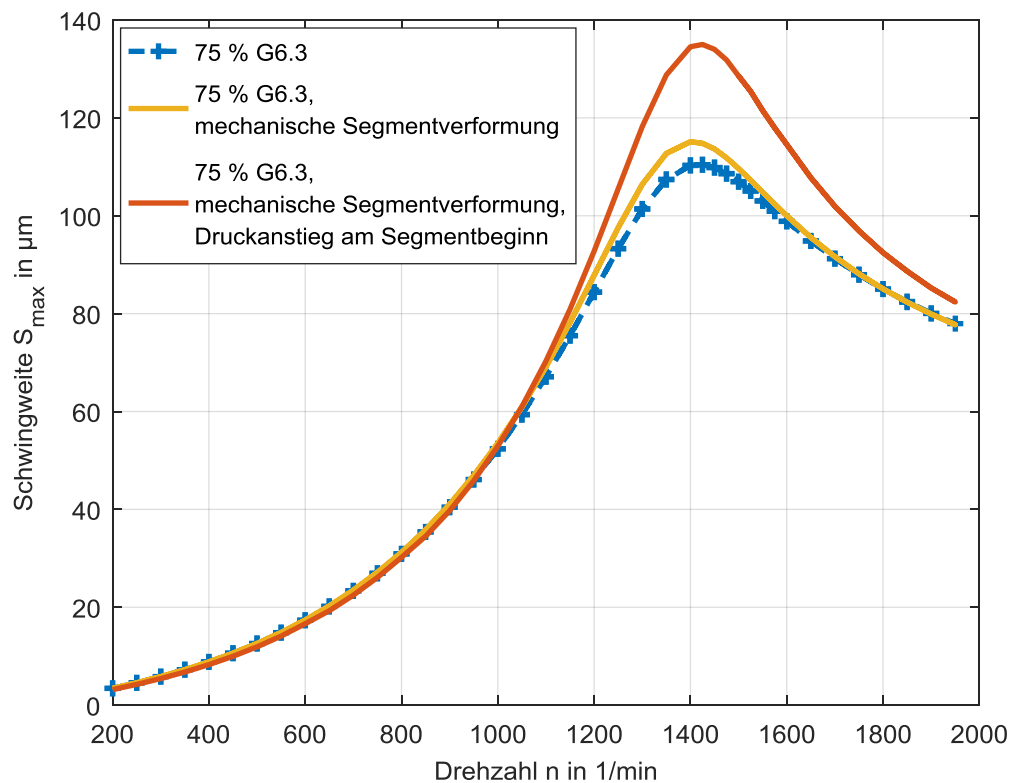


Abbildung 6.17: Schwingweiten der Generatormitte des Hydrogenerators; Einfluss der mechanischen Segmentverformung und des Druckaufbaus am Segmentbeginn; 5-düsiger Betrieb

6.3 Pumpenwelle einer Pumpspeicher-Hydrokraftwerksanlage

Das Schnittbild in Abbildung 6.18 zeigt einen von insgesamt fünf Wellensträngen eines Pumpspeicherkraftwerks. Die Pumpenwelle ist mit zwei kreiszylindrischen Radialfestsegmentgleitlagern (KZL) ausgestattet, die sich in ihren Abmessungen unterscheiden.

Das Rotormodell der Pumpenwelle ist in Abbildung 6.19 dargestellt und die wichtigsten Rotor- und Lagerdaten sind in Tabelle 6.4 enthalten. Am oberen Ende der Pumpe befindet sich ein Wandler, der die Pumpenwelle mit dem restlichen Strang koppelt. Diese Verbindung wird als biegeweich eingestuft, ist jedoch im Stande, Radialkräfte zu übertragen, wodurch eine Kopplung der Biegeschwingungen beider Rotoren existiert. Am unteren Ende der Pumpe, nahe dem unteren Pumpenführungslager (UPL), befindet sich ein Axiallager. Nach Revision und Austausch des oberen Pumpenführungslagers (OPL) der Maschine 1 werden im Betrieb subsynchrone Schwingungen gemessen (Variante 1). Der erneute Austausch des kreiszylindrischen oberen Pumpenführungslagers gegen ein profiliertes Vierflächen-Lager soll die subharmonischen Schwingungen beseitigen (Variante 2).

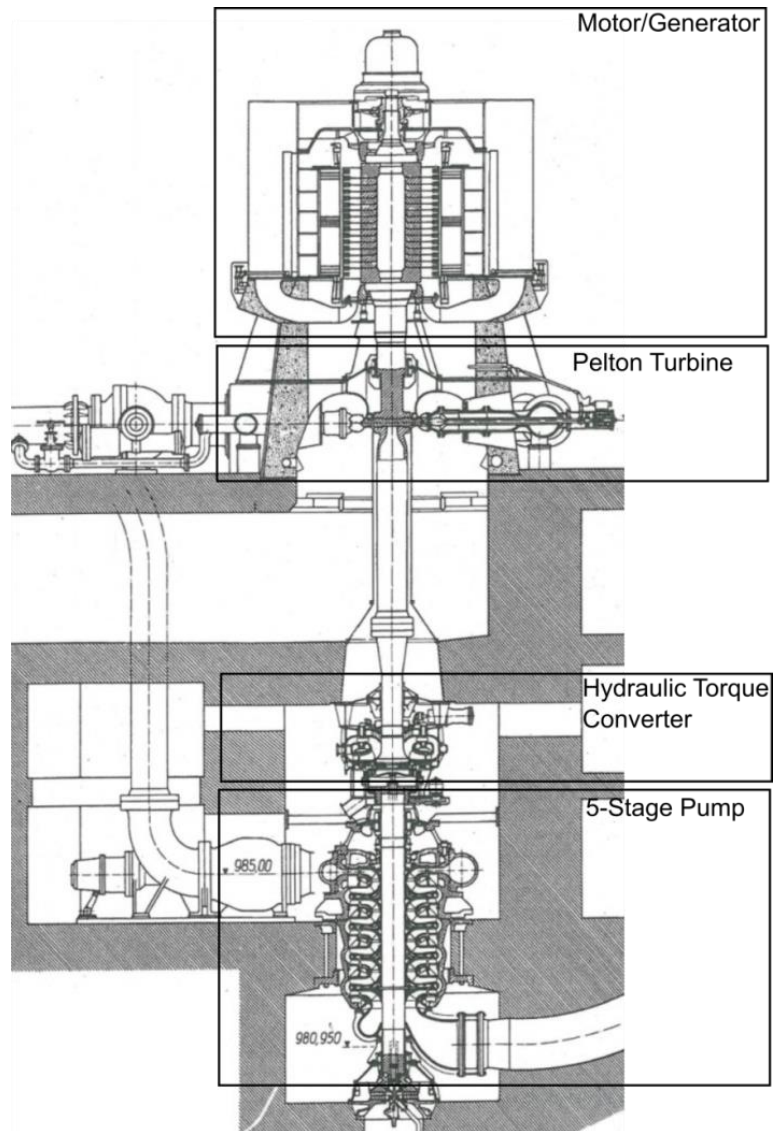


Abbildung 6.18: Wellenstrang der Maschine 1 des Pumpspeicherkraftwerks [99]

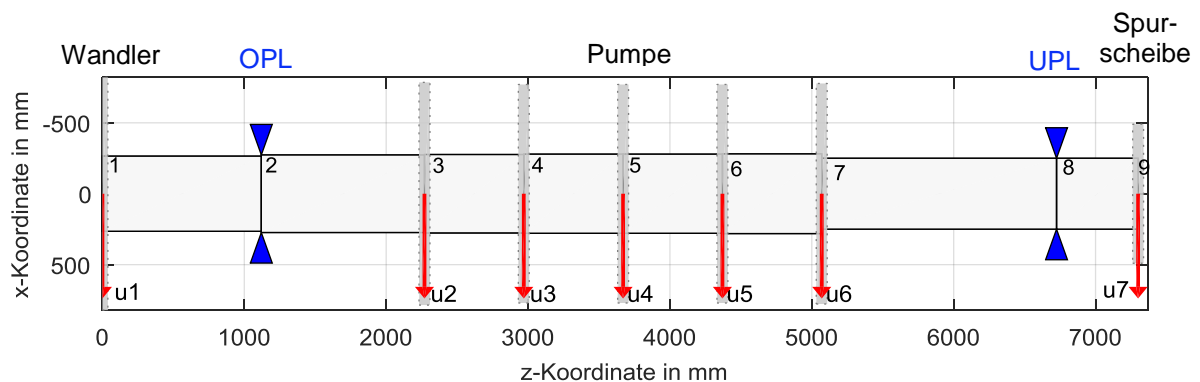


Abbildung 6.19: Rotormodell der Pumpenwelle des Pumpspeicherkraftwerks (liegende Darstellung)

Tabelle 6.4: Rotor- und Lagerdaten der Pumpenwelle der Pumpspeicher-Hydrokraftwerksanlage

Rotor			
Gesamtmasse m_{ges} in kg	≈ 26000		
Lagerabstand l_{la} in mm	≈ 5500		
Gesamtlänge l_{ges} in mm	≈ 7200		
Auswuchtgütestufe G in mm/s	6,3		
Lager	NDE (UPL)	NDE (OPL) Variante 1	NDE (OPL) Variante 2
Lagerspiel ψ in ‰	0,86	0,85	0,741
Profilierung ψ_p	1	1	2
Durchmesser D in mm	500	540	540
Breite B in mm	470	482	422
Segmentumschließungswinkel in °	72	72	72
Schmierstoff	ISO VG 68		

Abbildung 6.20 zeigt die gemessenen Amplitudenspektren des oberen und unteren Pumpenführungslagers im Fall der kreiszylindrischen Lagervariante bei der Betriebsdrehzahl von $n = 750 \text{ 1/min}$. Neben den drehzahlsynchronen Schwingungen existieren an beiden Lagerstellen subharmonische Schwingungen mit weitaus größerer Amplitude. Die Frequenz der subharmonischen Schwingungen beträgt etwa die Hälfte der Drehfrequenz.

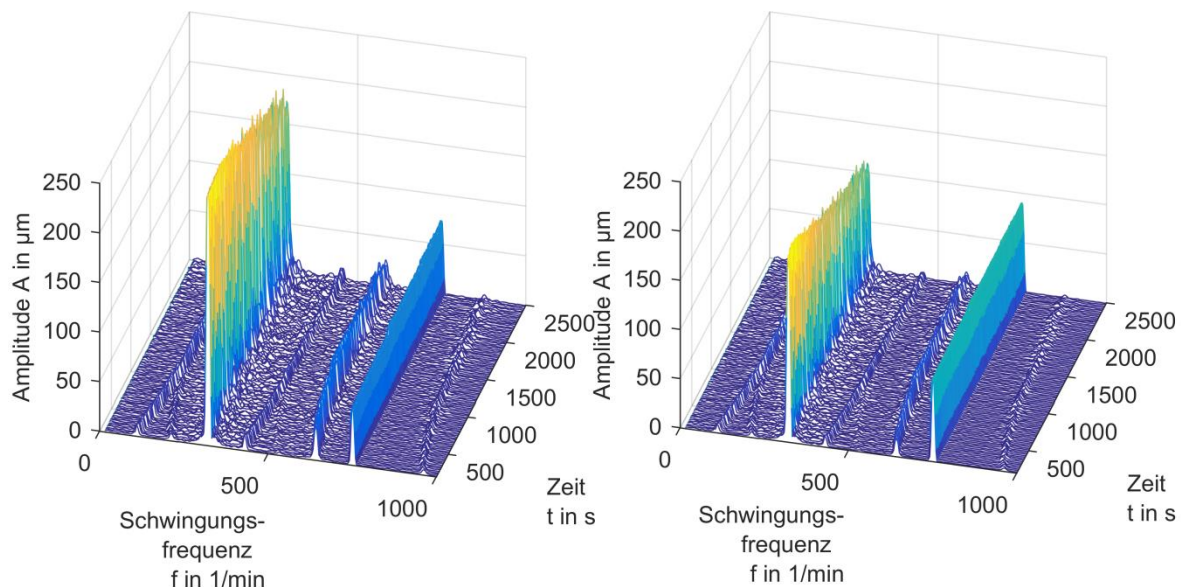


Abbildung 6.20: Amplitudenspektren der gemessenen Schwingungen für die gesamte Versuchszeit; links: oberes Pumpenführungslager (OPL-KZL); rechts: unteres Pumpenführungslager (UPL-KZL)

Nach dem Wechsel des oberen Pumpenführungslagers gegen das profilierte Vierflächen-Lager werden die subharmonischen Schwingungen deutlich abgeschwächt, verschwinden jedoch nicht vollständig, wie die Amplitudenspektren in Abbildung 6.21 zeigen.

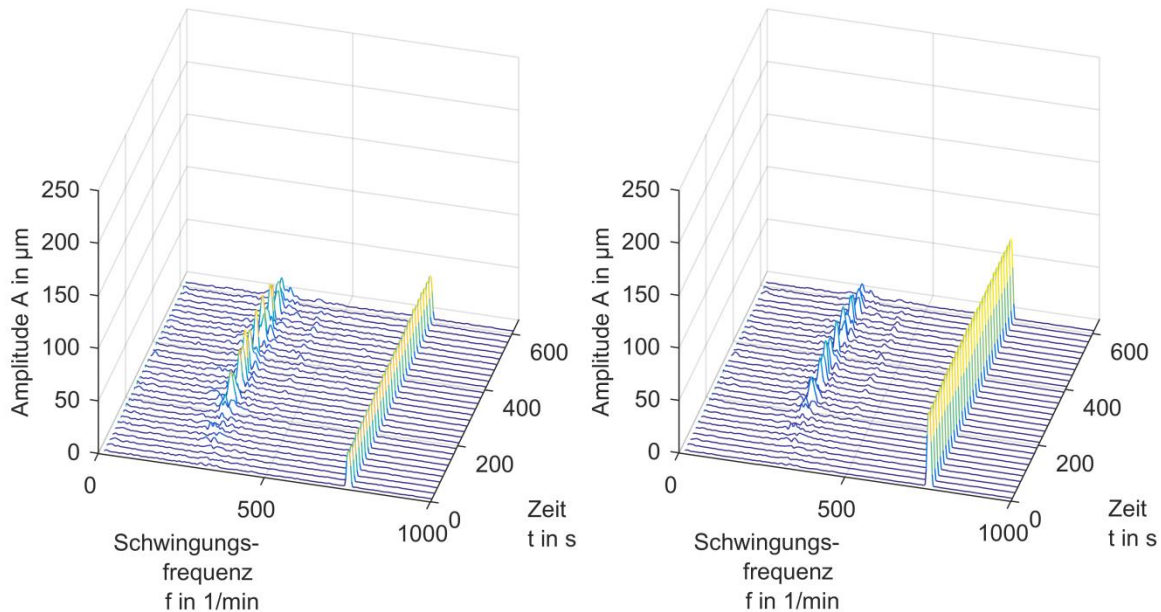


Abbildung 6.21 Amplitudenspektren der gemessenen Schwingungen für die gesamte Versuchszeit; links: oberes Pumpenführungslager (OPL-4FL); rechts: unteres Pumpenführungslager (UPL-KZL)

Da sowohl die statischen Lagerkräfte, die durch Strömungseffekte in der Pumpe entstehen, als auch der Wuchtzustand nicht bekannt sind, werden diese in der Simulation variiert. Für die Unwucht wird eine gleichgerichtete Verteilung über alle Massen angenommen. Die Amplitudenspektren der Simulation werden bezüglich der synchronen und subsynchronen Amplituden ausgewertet und in Abhängigkeit der statischen Lagerkraft und der Unwucht in Abbildung 6.22 für die Variante 1 dargestellt. Mit steigender Unwucht und statischer Lagerkraft nehmen die synchronen Amplituden zu, wobei nur eine geringe Abhängigkeit von der statischen Lagerkraft existiert. Die subsynchronen Bewegungsanteile nehmen dagegen mit abnehmender statischer Kraft und Unwucht zu. Am oberen Pumpenführungslager werden wie in der Messung größere subsynchrone Amplituden registriert. Abbildung 6.23 beinhaltet die entsprechenden Simulationsergebnisse der Variante 2. Durch den Einsatz des Vierflächen-Lagers treten am oberen Führungslager keine subharmonischen Schwingungen mehr auf. Am unteren Lager existiert noch ein Bereich subharmonischer Schwingungen bei geringer Unwucht und geringer statischer Lagerkraft. Die subharmonischen Bewegungen des unteren Lagers übertragen sich mit sehr geringer Amplitude ($A_{sub} \approx 1 \mu m$) auch auf das obere Lager.

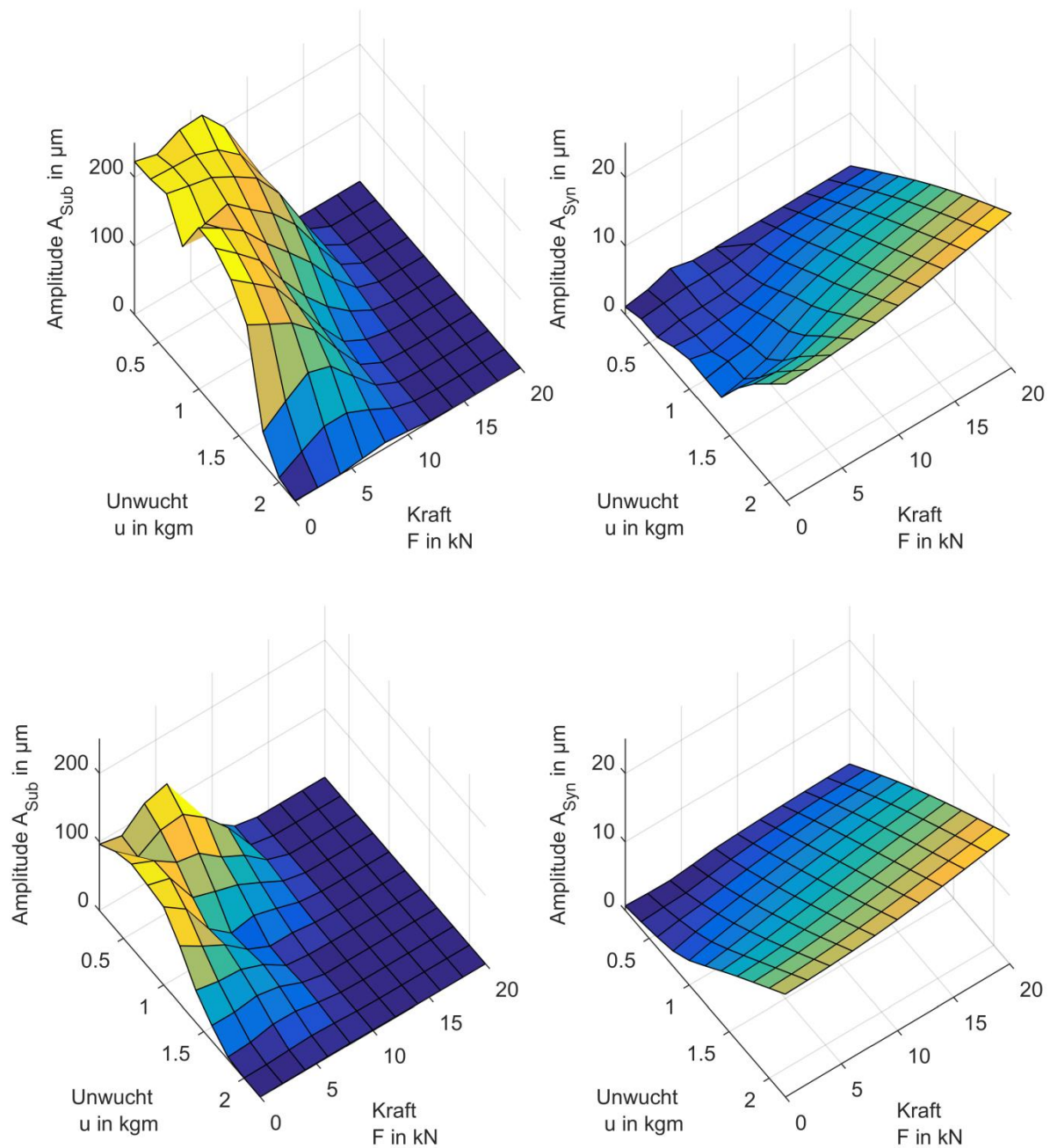


Abbildung 6.22: Berechnete Schwingungsamplituden der drehzahlsynchronen (Syn) und subsynchronen (Sub) Bewegungsanteile der relativen Wellenschwingungsamplituden in den Lagerstellen, Oben: Kreiszyllindrisches oberes Pumpenführungslager (OPL-KZL-Lager), Unten: Kreiszyllindrisches unteres Pumpenführungslager (UPL-KZL-Lager); Die synchronen Schwingungen sind zur besseren Lesbarkeit 10-fach überhöht dargestellt.

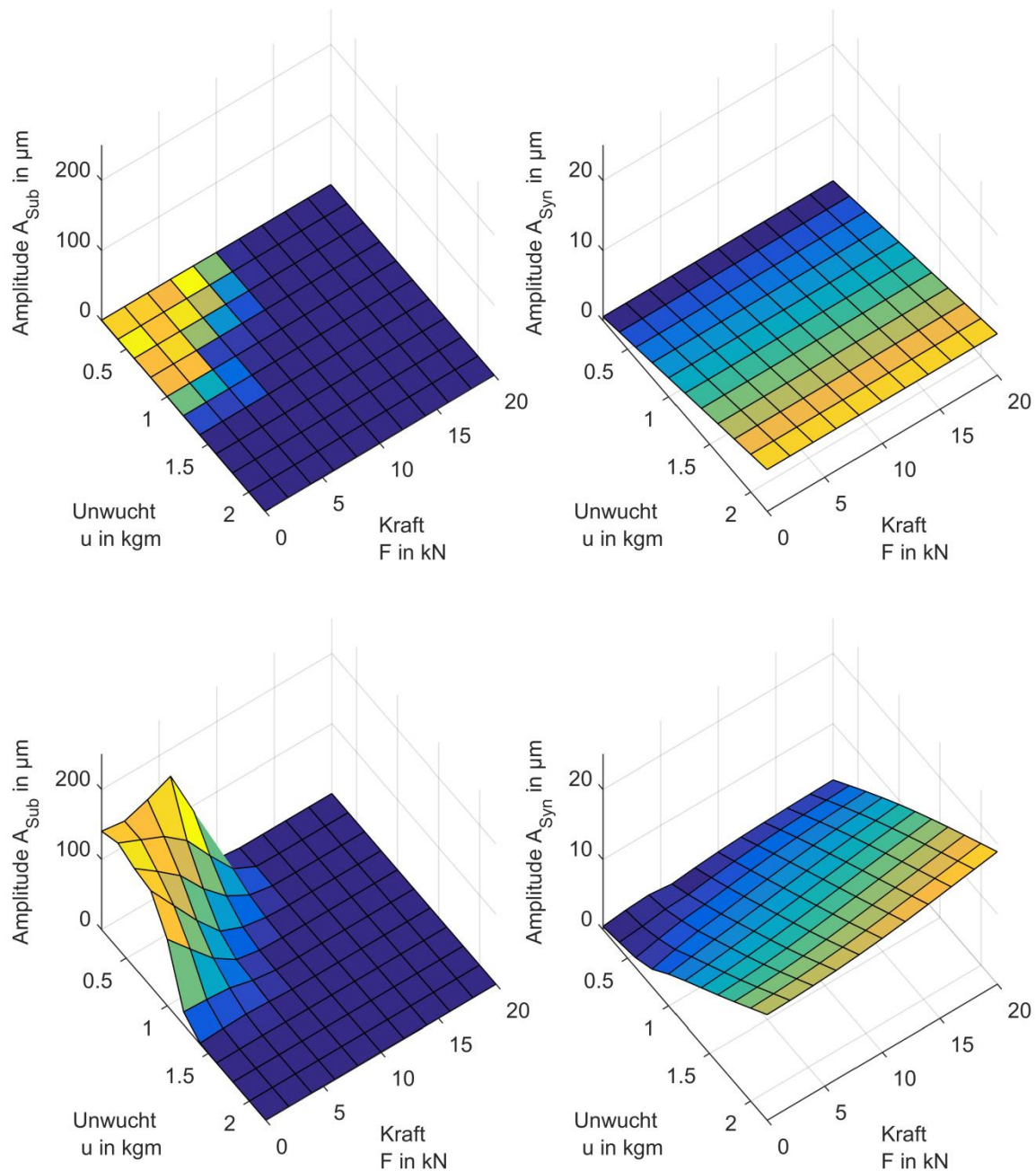


Abbildung 6.23: Berechnete Schwingungsamplituden der drehzahlsynchronen (Syn) und subsynchronen (Sub) Bewegungsanteile der relativen Wellenschwingsamplituden in den Lagerstellen, Oben: Oberes Pumpenführungslager als profiliertes Vierflächen-Festsegmentlager (OPL-4FL-Lager), Unten: Kreiszyllindrisches unteres Pumpenführungslager (UPL-KZL-Lager); Die synchronen Schwingungen sind zur besseren Lesbarkeit 10-fach überhöht dargestellt.

7. Zusammenfassung

Entwicklung und Verifikation eines volldynamischen Kippsegmentlagermodells

Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein volldynamisches Kippsegmentlagermodell aufgebaut und verifiziert, das die Segmente als eigene, schwingungsfähige Systeme abbildet und die Schmierspaltströmung und damit den Druckaufbau durch direktes Lösen der Reynolds'schen Differenzialgleichung beschreibt. Das Modell ist für ein Festsegmentlager als Spezialfall des Kippsegmentlagers ebenfalls gültig. Es wurde eine Kopplung mit dem Rotordynamikprogramm realisiert, wodurch eine Analyse des Schwingungsverhaltens des Rotor-Lager-Systems im Zeitschrittverfahren ermöglicht wurde. Anschließend wurden Variationsrechnungen bezüglich des Einflusses von Unwucht, statischer Lagerlast, Abstützungssteifigkeit, Lagerspiel und des Lagerdesigns durchgeführt. Die Ergebnisse liefern ein umfangreiches Verständnis der Lage der kritischen Drehzahl. Außerdem ist es möglich, die Grenzwerte der kritischen Drehzahl, also die maximal mögliche Anhebung mit Hilfe einer linearen Rotordynamikanalyse festzustellen.

Nichtlineare Näherungsverfahren

Das nichtlineare Näherungsverfahren nach [17] wurde erfolgreich zur Berücksichtigung einer Lagerverkantung erweitert und einer Verifikation unterzogen. Hierbei wurden praxisrelevante Parameterbereiche identifiziert, in denen das Verfahren seine Gültigkeit verliert. Dies ist z. B. bei schwach profilierten Lagern oder bei stark supersynchronen Schwingungsfrequenzen der Fall. Ferner wurde das Verfahren auf Kippsegmentlager angewendet, und eine hohe Approximationsgüte bezüglich des volldynamischen Kippsegmentlagermodells erreicht. Im Bereich der Resonanz können aufgrund der starken Nichtlinearität jedoch Abweichungen auftreten.

Störungsrechnung höherer Ordnung

Die nichtlinearen Schmierfilmkräfte wurden mit einer vollständigen Taylor Entwicklung bis zur dritten Ordnung beschrieben, was auf ein erweitertes, nichtlineares Kraftgesetz führt. Zur Bestimmung der Taylor-Koeffizienten wurde die Reynolds'sche Differenzialgleichung partiell nach der lateralen Zapfenposition und –geschwindigkeit differenziert, was auf die Störungsgleichungen höherer Ordnung führt. Zusätzlich wurde ein Verfahren zur Berücksichtigung der Segmentbewegung entwickelt. Die Gültigkeit einer linearen Rotordynamikanalyse kann durch Einsetzen der Bahnkurve

in das erweiterte Kraftgesetz und Vergleich mit den Kräften der linearen Analyse bestätigt werden.

Lineare Eingangsgrößen zur Approximation der kritischen Drehzahl

Unter der Annahme einer kreisförmigen Zapfenbahnkurve können globale dynamische Koeffizienten, in Abhängigkeit der Drehzahl und des Bahnradius, angegeben werden. Die Bildung der Koeffizienten erfolgt mit dem Ziel, den Zusammenhang der Lagerkraft mit dem Bahnradius durch ein KC-Modell abzubilden. Da eine nichtlineare Charakteristik vorliegt, besitzen die Koeffizienten eine Abhängigkeit vom Bahnradius und der Drehzahl. Für Ansprüche hoher Genauigkeit kann der Zusammenhang von Bahnradius und dynamischer Lagerkraft mit dem volldynamischen Kippsegmentlagermodell oder dem nichtlinearen Näherungsverfahren berechnet werden. Zur Abschätzung kann auch die erweiterte Störungsrechnung herangezogen werden. Die globalen Koeffizienten können als Eingangsgröße einer linearen Rotordynamikanalyse dienen. Durch wiederholtes Durchführen der linearen Analyse und Aktualisierung der dynamischen Koeffizienten kann die Anhebung der kritischen Drehzahl bestimmt werden.

Empfohlene Vorgehensweise zur dynamischen Analyse vertikaler Maschinen

Auf Basis der gewonnenen Erkenntnisse wird der in Abbildung 7.1 dargestellte Ablauf zur Berechnung der kritischen Drehzahl vertikaler Maschinen empfohlen:

- Berechnung der kritischen Drehzahl mittels linearer Rotordynamikanalyse unter Berücksichtigung der Schmierfilmelastizität.
- Sofern nur die kritische Drehzahl von Interesse ist, kann die maximal mögliche Amplitudenerhöhung zunächst nach der Linearisierungshypothese abgeschätzt werden. Hierbei erfolgt die Berechnung der kritischen Drehzahl bei totaler Versteifung der Ölfilme. Die Segmentabstützungssteifigkeiten werden unter Berücksichtigung der Abstützrichtungen gemittelt berücksichtigt.
- Liegt eine potenzielle Anhebung der kritischen Drehzahl vor, empfiehlt es sich, die lineare Berechnung unter Berücksichtigung der Schmierfilmelastizität zu verifizieren, indem die Zapfenbahnkurven in das erweiterte Kraftgesetz eingesetzt werden.
- Bei erfolgreicher Verifizierung der linearen Berechnung sind keine weiteren Analyseschritte notwendig. Werden stattdessen signifikante Abweichungen

vorhergesagt, sollte eine nichtlineare Analyse mit einem Näherungsverfahren oder dem volldynamischen Kippsegmentlagermodell erfolgen.

- Sind neben der kritischen Drehzahl auch die Amplituden von Interesse, sollte die lineare Analyse in jedem Fall, ungeachtet der Linearisierungshypothese, verifiziert werden.

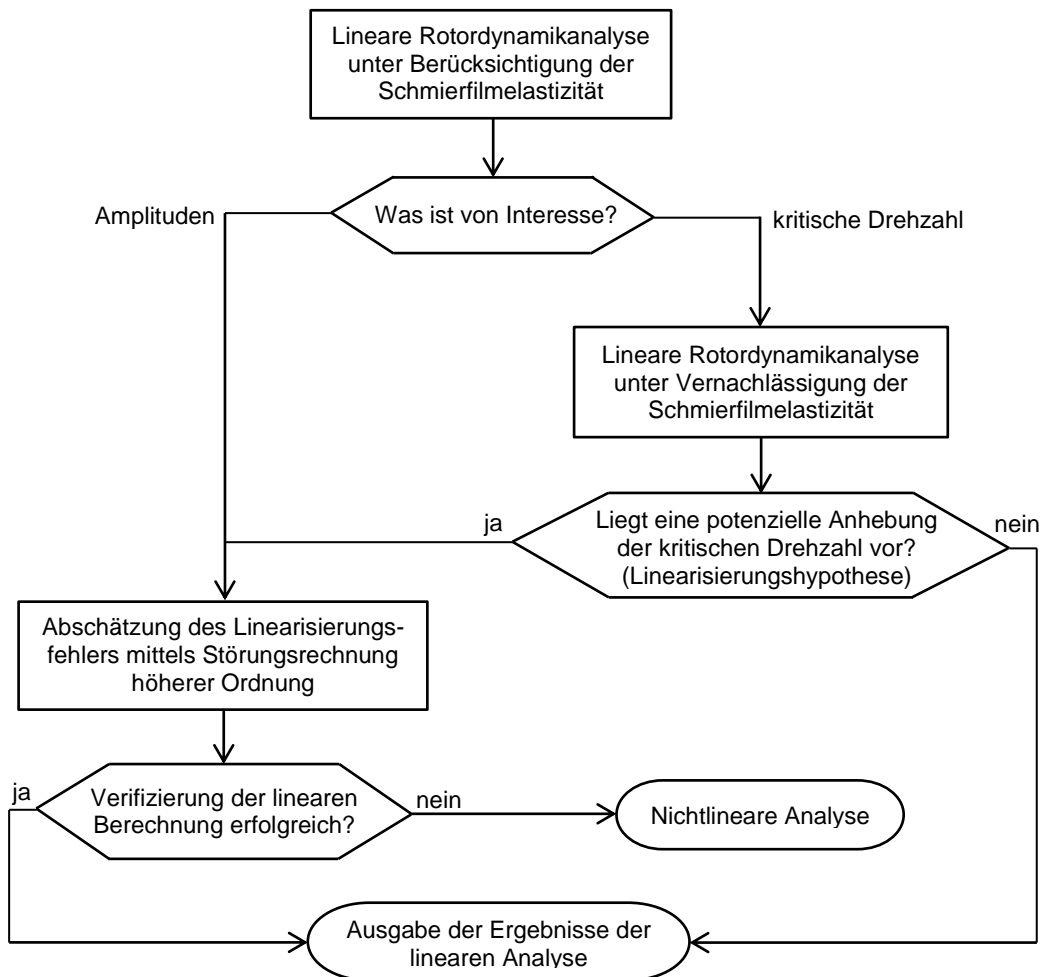


Abbildung 7.1: Empfohlener Berechnungsablauf für die dynamische Analyse vertikaler Maschinen

Axiallager und gezieltes Ausrichten der Lagerstellen

An einer üblichen Konstruktion einer vertikalen Maschine wurden Untersuchungen zum gezielten Fehlausrichten der Lagerstellen durchgeführt. Hierbei wurde die Wechselwirkung von Ausrichtung und Abstützungs- bzw. Rotorsteifigkeit analysiert. Grundsätzlich kann das Fehlausrichten der Lager das Schwingungsverhalten beeinflussen, jedoch entstehen nur bei sehr steifen Konstruktionen signifikante Lagerkräfte aufgrund der Verspannung.

Aufgrund einer exzentrischen Lage eines Generatorläufers im magnetischen Feld des Stators existieren statische Lagerkräfte, die in praxisrelevanten Bereichen zu signifikanten Änderungen des Schwingungsverhaltens führen können.

Ausblick

Bei Kippsegmentlagern wurde ein Druckanstieg am Segmentbeginn mehrfach experimentell nachgewiesen [78], [89]. Zur Beschreibung dieses Effektes existiert ein physikalisches Modell, das in das volldynamische Kippsegmentlagermodell implementiert wurde. Hierdurch wurde ein Einfluss auf die Dynamik des Systems festgestellt, der in bestimmten Parameterbereichen möglicherweise nicht zu vernachlässigen ist. Es wurde eine Versteifung des Lagers festgestellt, die zu einer Erhöhung der Resonanzamplituden führte. Beim 8-Kippsegmentlager wurde außerdem eine Anhebung der kritischen Drehzahl beobachtet. Da zwar das statische, jedoch nicht das dynamische Verhalten des Modells verifiziert ist, sollten hierzu weitere Analysen erfolgen. Insbesondere experimentelle Untersuchungen würden einen wertvollen Beitrag zur Modellvalidierung liefern.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde unter dynamischen Belastungen stets davon ausgegangen, dass der thermische Zustand des Lagers dem des korrespondierenden, statischen Betriebspunktes entspricht. Die instationäre Lösung der Energie- und Wärmeleitungsgleichungen sollte unter Umständen berücksichtigt werden.

Übersicht über die verwendeten/ entwickelten Berechnungsmodelle für Radialgleitlager

Um die angewendeten Verfahren und Methoden besser einordnen zu können, findet sich hierzu in Abbildung 7.2 abschließend eine übersichtliche Kurzdarstellung. Die grau hinterlegten Methoden wurden im Rahmen dieser Arbeit neu entwickelt.

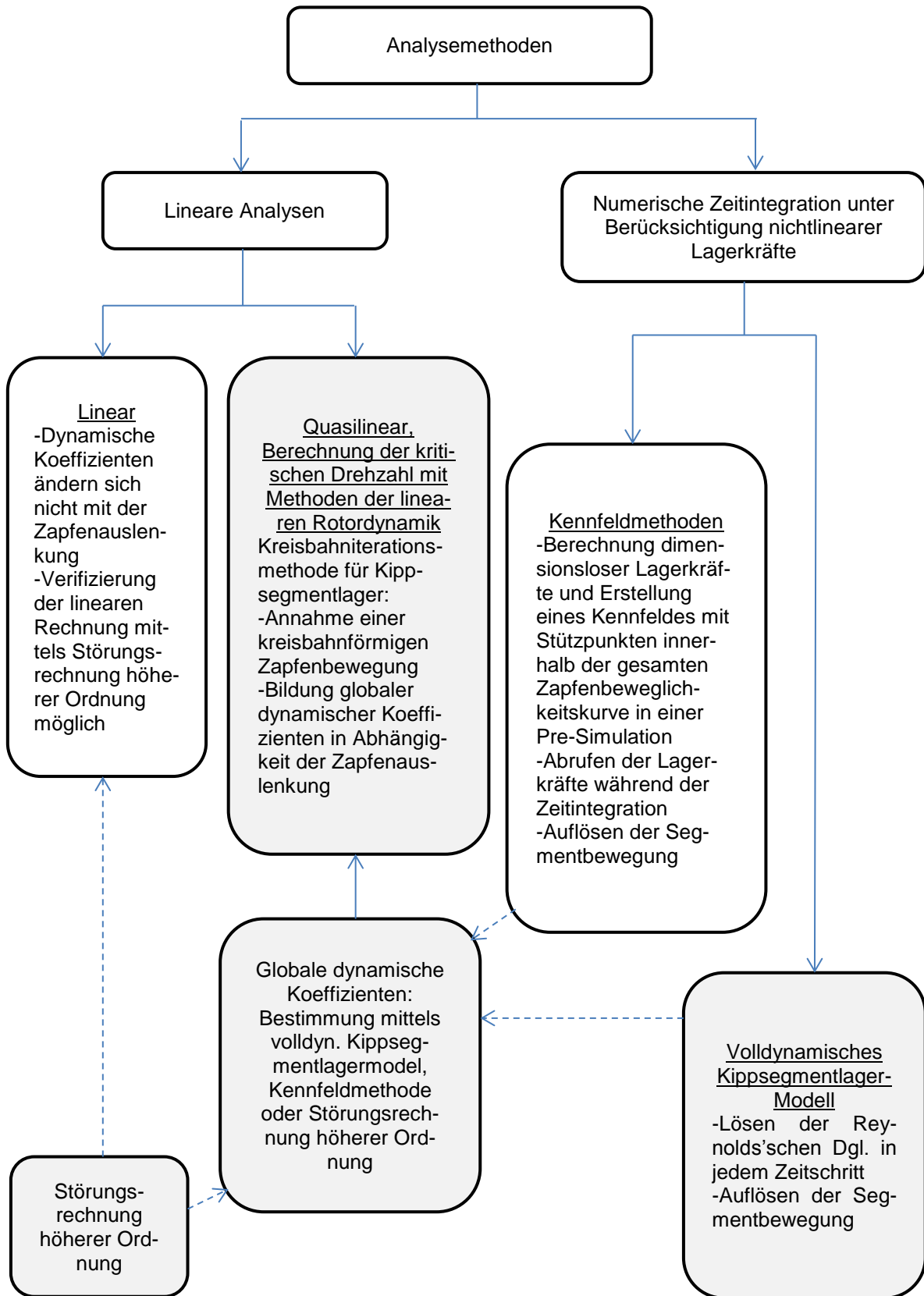


Abbildung 7.2: Übersicht über die Berechnungsmethoden zur Berücksichtigung der Radiallagercharakteristik in rotordynamischen Analysen

8. Literaturverzeichnis

- [1] Glienicke, J., Walle, F., Walter, J., Wiedenmann, R., (1978), "Rotordämpfung. Unwuchtschwingungen und Systemdämpfung von gleitgelagerten Rotoren unter praxisnahen Bedingungen", Forsch.-Ber. Verbrennungskraftmaschinen H. 251, Frankfurt/M. 1978.
- [2] Schweizer, B., (2009), "Total instability of turbocharger rotors – Physical explanation of the dynamic failure of rotors with full-floating ring bearings", Journal of Sound and Vibration, **328**(1-2), Issue 1-2, pp. 156-190.
- [3] Merker, H. -J., (1981), "Über den nichtlinearen Einfluß von Gleitlagern auf die Schwingungen von Rotoren," Dissertation, TH Darmstadt.
- [4] Hegel, T., (1993), „Einfluss hydrodynamischer Axiallager auf die Querschwingungen hochtouriger Rotoren“, Dissertation, TU Braunschweig.
- [5] Vetter, D., Hagemann, T., Schwarze, H., (2014), "Predictions for run-up procedures of automotive turbochargers with full-floating ring bearings including thermal effects and different bearing setups"; 11th International Conference on Turbochargers and Turbocharging, IMechE Paper No. C1384/055, London, 13-14 Mai.
- [6] Utecht, M., (1991), "Schwingungstechnische Auslegung eines vertikalen Elektromotors großer Leistung mit überkritischem Rotor in Gleitlagern," SIRM, Schwingungen in rotierenden Maschinen, Braunschweig, S. 194-203.
- [7] Gasch, R., Nordmann, R., Pfützner, H., (2002), "Rotordynamik", 2. Auflage, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
- [8] Vijayaraghavan, D., Keith JR., T. G. (1989), "Development and Evaluation of a Cavitation Algorithm", Tribology Transactions, **32**(2), pp. 225-233, doi: 10.1080/104020089 08981882.
- [9] Kumar A., Booker JF., (1991), "A Finite Element Cavitation Algorithm", ASME Journal of Tribology, **113**(2), pp. 276-284, doi: 10.1115/1.2920617.
- [10] Kumar A., Booker JF., (1991), "A Finite Element Cavitation Algorithm: Application/Validation", ASME Journal of Tribology, **113**(2), pp. 255-260, doi: 10.1115/1.2920614.
- [11] Mermertas, Ü., (2008), "Nichtlinearer Einfluss von Radialgleitlagern auf die Dynamik schnelllaufender Rotoren", Dissertation, Technische Universität Clausthal, Clausthal-Zellerfeld.
- [12] Hagemann, T., (2011), "Ölzuführungseinfluss bei schnell laufenden und hoch belasteten Radialgleitlagern unter Berücksichtigung des Lagerdeformationsverhaltens", Dissertation, Technische Universität Clausthal, Clausthal-Zellerfeld.
- [13] Booker, J. F., (1965), "Dynamically Loaded Journal Bearings: Mobility Method of Solution", ASME Journal of Basic Engineering, **87**(3), pp. 537-546, doi: 10.1115/1.3650602.
- [14] Childs, D., Moes, H., van Leeuwen, H., (1977), "Journal Bearing Impedance Descriptions for Rotordynamic Applications", ASME Journal of Lubrication Technology, **99**(2), pp. 198-214, doi: 10.1115/1.3453021.
- [15] Hahn, H. W., (1957), „Das zylindrische Gleitlager endlicher Breite unter zeitlich veränderlicher Belastung“, Dissertation Universität Karlsruhe.

- [16] Butenschön, H. J., (1976), „Das hydrodynamische, zylindrische Gleitlager endlicher Breite unter instationärer Belastung“, Dissertation TH Karlsruhe.
- [17] Glienicke, J., Eilers, M., Gerdes, R., (1993), „Nichtlineare Rotordynamik“, FVV-Heft-Nr. **437**, Frankfurt am Main.
- [18] Schaffrath, G., (1969), „Die Bahn des Wellenmittelpunktes im dynamisch belasteten Radial-Gleitlager beliebigen Querschnittes“, Konstruktion **21**(3), S. 97-104.
- [19] Lu, H., (1986), „Nichtlineares Schwingungsverhalten hochtouriger Rotoren mit Mehrgleitflächen- und Schwimmbuchsenlagern“, Dissertation Univ. Karlsruhe.
- [20] Ott, H. H., (1970), „Berechnung segmentierter Radialgleitlager endlicher Breite bei instationärem Betrieb“, Schweizerische Bauzeitung, **88**(21).
- [21] Varga, Z. E., (1971), „Wellenbewegung, Reibung und Öldurchsatz beim segmentierten Radiallager von beliebiger Spaltform unter konstanter und zeitlich veränderlicher Belastung“, Dissertation ETH Zürich.
- [22] Weber, D., Nordmann, R., (1993), „Berechnung der Biegeschwingungen großer rotierender Maschinen unter Berücksichtigung nichtlinearer Gleitlagermodelle“, SIRM II, Schwingungen in rotierenden Maschinen, Braunschweig.
- [23] White, M. F., Torbergsen, E., Lumpkin, V. A. (1997), „Rotordynamic analysis of a vertical pump with tilting-pad journal bearings“ Wear, **207**(1-2), pp. 128-136, doi: 10.1016/S0043-1648(96)07469-8.
- [24] Shi, M., Wang, D., Zhang, J., (2013), „Nonlinear dynamic analysis of a vertical rotor-bearing system“, Journal of Mechanical Science and Technology, **27**(1), pp. 9-19, doi: 10.1007/s12206-012-1221-x.
- [25] Springer, H. (1979), „Nichtlineare Schwingungen schwerer Rotoren mit vertikaler Welle und Kippsegmentradiallagern“, Forschung im Ingenieurwesen A, **45**(4), pp. 119-132, doi: 10.1007/BF02560675.
- [26] Lund, J. W., (1964), „Spring and Damping Coefficients for the Tilting-Pad Journal Bearing“, ASLE TRANSACTIONS, **7**(4), pp. 342-352, doi: 10.1080/05698196408972064.
- [27] Barrett, L. E., Allaire, P. E., Wilson, B. W. (1988), „The Eigenvalue Dependence of Reduced Tilting Pad Bearing Stiffness and Damping Coefficients“, Tribology Transactions, **31**(4), pp. 411-419, doi: 10.1080/10402008808981842.
- [28] Lund, J. W., Pederson, L. B., (1987), „The Influence of Pad Flexibility on the Dynamic Coefficients of a Tilting Pad Journal Bearing“, ASME Journal of Tribology, **109**(1), pp. 65-70.
- [29] Wilkes, J. C., Childs, D. W., (2013), „Improving Tilting Pad Journal Bearing Predictions—Part I: Model Development and Impact of Rotor Excited Versus Bearing Excited Impedance Coefficients“, ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, **135**(1), 012502, doi:10.1115/1.4007367.
- [30] Pagano, S., Rocca, E., Russo, M., Russo, R., (1995), „Dynamic Behaviour of Tilting-Pad Journal Bearings“, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology, **209**(4), pp. 275-285, doi: 10.1243/PIME_PROC_1995_209_438_02.
- [31] Schnepf, T., (1989), „Kippsegmentlager mit Segmentdämpfung für extreme Betriebsbedingungen“, Dissertation TH Karlsruhe.

- [32] Glienicke, J., Fuchs, A., Peng, D., Lutz, M., Freytag, C., (2000), „Grundlagen für die Entwicklung verbesserter, störungsunempfindlicher Lagerungen für hohe Umfangsgeschwindigkeiten“, Forsch. Ber. Verbrennungskraftmaschinen Heft-Nr. **694**, FVV Frankfurt/M.
- [33] Peng, D., (2001), „Auslegung von Kippsegmentlagern für hohe Umfangsgeschwindigkeiten“, Dissertation TU Braunschweig.
- [34] Gadangi, R. K., Palazzolo, A. B., Kim, J., (1996), „Transient Analysis of Plain and Tilt Pad Journal Bearings Including Fluid Film Temperature Effects“, ASME Journal of Tribology, **118**(2), pp. 423-430, doi:10.1115/1.2831319.
- [35] Zhang, X.-Z., Ma L.-F., (2000), „Numerical Simulation of Nonlinear Oil-Film Forces of Tilting-Pad Guide Bearing in Large Hydro-unit“, International Journal of Rotating Machinery, **6**(5), pp. 345-353, doi: 10.1155/S1023621X00000324.
- [36] Abu-Mahfouz I, Adams M. L., (2005) „Numerical Study of Some Nonlinear Dynamics of a Rotor Supported on a Three-Pad Tilting Pad Journal Bearing (TPJB)“, ASME Journal of Vibration and Acoustics, **127**(3), pp. 262-272, doi: 10.1115/1.1888593.
- [37] Someya, T., (1962), „Stabilität einer in zylindrischen Gleitlagern laufenden, unwuchtfreien Welle – Beitrag zur Theorie des instationär belasteten Gleitlagers“, Dissertation, TH Karlsruhe.
- [38] Schaffrath, G., (1967), „Das Gleitlager mit beliebiger Schmierspaltform: Verlagerung des Wellenzapfens bei zeitlich veränderlicher Belastung.“, Dissertation, TH Karlsruhe.
- [39] Han, D.-C., (1979), „Statische und dynamische Eigenschaften von Gleitlagern bei hohen Umfangsgeschwindigkeiten und bei Verkantung“, Dissertation, TH Karlsruhe.
- [40] Mittwollen, N., (1990), „Betriebsverhalten von Radialgleitlagern bei hohen Umfangsgeschwindigkeiten und hohen thermischen Belastungen – Theoretische Untersuchungen“, Fortschr.-Ber. VDI Reihe 1 Nr. **187**, Düsseldorf VDI-Verlag.
- [41] Fuchs, A., (2002), „Schnelllaufende Radialgleitlagerungen im instationären Betrieb“, Dissertation, TU Braunschweig.
- [42] Braun, M. J., Choy, F. K., Hu, Y.Y., (1991), “Nonlinear Effects in a Plain Journal Bearing: Part 1—Analytical Study”, ASME Journal of Tribology, **113**(3), pp. 555-561, doi:10.1115/1.2920659.
- [43] Braun, M. J., Choy, F. K., Hu, Y.Y., (1991), “Nonlinear Effects in a Plain Journal Bearing: Part 2—Results”, ASME Journal of Tribology, **113**(3), pp. 563-570, doi:10.1115/1.2920660.
- [44] Sawicki, J. T., Rao, T. V. V. L. N., (2004), “A Nonlinear Model for Prediction of Dynamic Coefficients in a Hydrodynamic Journal Bearing”, International Journal of Rotating Machinery, **10**(6), pp. 507-513, doi: 10.1080/10236210490883111.
- [45] Zhao, S. X., Dai, X. D., Meng, G., Zhu, J., (2005), “An experimental study of nonlinear oil-film forces of a journal bearing”, Journal of Sound and Vibration, **287**(4-5), pp. 872-843, doi:10.1016/j.jsv.2004.11.034.
- [46] Weimin, W., Lihua, Y., Tiejun, W., Lie, Y., (2012), “Nonlinear dynamic coefficients prediction of journal bearings using partial derivative method”, IMechE

- Journal of Engineering Tribology, **226**(4), pp. 328-339, doi: 10.1177/1350650111431526.
- [47] Glienicke, J., Hegel, Th., Mittwollen, N., (1989), „Axiallager Dynamik“, FVV-Heft-Nr. **399**, Frankfurt am Main.
- [48] Berger, S., Bonneau, O., Frene, J., (2000), „Influence of Axial Thrust Bearing Defects on the Dynamic Behavior of an Elastic Shaft“, Tribology International, **33**(3-4), pp. 153-160, doi: 10.1016/S0301-679X(00)00021-9.
- [49] Lie, Y., Bhat, R. B., (1995), „Coupled Dynamics of a Rotor-Journal Bearing System Equipped with Thrust Bearings“, Shock and Vibration, **2**(1), pp. 1-14, doi: 10.3233/SAV-1995-2101.
- [50] Lie, Y., Bhat, R. B., (1996), „Prediction of Hydrodynamic Thrust Bearing Performance Using the Modified Trefftz Method“, Tribology Transactions, **39**(1), pp. 112-120, doi: 10.1080/10402009608983510.
- [51] Mittwollen, N., Hegel, T., Glienicke, J., (1991), „Effect of Hydrodynamic Thrust Bearings on Lateral Shaft Vibrations“, ASME Journal of Tribology., **113**(4), pp. 811-818, doi: 10.1115/1.2920697.
- [52] Chang-Jian, C.-W., (2010), „Nonlinear Simulation of Rotor Dynamics Coupled with Journal and Thrust Bearing Dynamics under Nonlinear Suspension“, Tribology Transactions, **53**(6), pp. 897-908, doi: 10.1080/10402004.2010.507904.
- [53] Li, S., (2016), „Einfluss äußerer Lasten auf das Stabilitätsverhalten von Gleitlagerungen eines PKW-Abgasturboladers“, Dissertation Technische Universität Clausthal.
- [54] Kraft, C., Schwarze, H., (2014), „Benutzeranleitung COMBROS A, Ver. 1.2“, Clausthal-Zellerfeld.
- [55] Kraft, C., Schwarze, H., (2013), „Hochbelastete, schnell laufende Axialgleitlager in einfacher und doppelwirkender Anordnung unter Berücksichtigung statischer Spurscheibenverkantung“, FVV-Heft-Nr. **1019**, Frankfurt am Main.
- [56] Gasch, R., Knothe, K., Liebich, R., (2012), „Strukturdynamik: Diskrete Systeme und Kontinua“, 2. Auflage, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [57] Shampine, L.F., Hosea, M.E., (1996), „Analysis and implementation of TR-BDF2“, Elsevier, Applied Numerical Mathematics, **20**(1-2), pp. 21-37, doi: 10.1016/0168-9274(95)00115-8.
- [58] Woschke, E., (2013), „Simulation gleitgelagerter Systeme in Mehrkörperprogrammen unter Berücksichtigung mechanischer und thermischer Deformationen“, Dissertation, Universität Magdeburg.
- [59] DIN ISO 7919-1., (1997), „Messung und Bewertung von Wellenschwingungen, Teil 1: Allgemeine Anleitungen“, Beuth-Verlag.
- [60] Eisenberger, M., (1994), „Derivation of Shape Functions for an Exact 4-D.O.F. Timoshenko Beam Element“, Communications in Numerical Methods in Engineering, **10**(9), pp. 673-681, doi: 10.1002/cnm.1640100902.
- [61] Nelson, H. D., McVaugh, J. M., (1976), „The Dynamics of Rotor-Bearing Systems Using Finite Elements“, ASME Journal of Engineering for Industry, **98**(2), pp. 593-600, doi:10.1115/1.3438942.

- [62] Nelson, H. D., (1980), "A Finite Rotating Shaft Element Using Timoshenko Beam Theory", ASME Journal of Mechanical Design, **102**(4), pp. 793-803, doi: 10.1115/1.3254824.
- [63] Cowper, G. R., (1966), "The Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theory", ASME Journal of Applied Mechanics, **33**(2), pp. 355-340, doi: 10.1115/1.3625046.
- [64] Dowson, D., (1962), "A Generalized Reynolds Equation for Fluid Film Lubrication", International Journal of Mechanical Sciences, **4**(2), pp. 159-170, doi: 10.1016/S0020-7403(62)80038-1.
- [65] Boussinesq, J., (1877), "Essai sur la théorie des eaux courantes. Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences de l'Institut de France. Sci. Math. Phys. Tome **23**, pp. 46-47.
- [66] Constantinescu, V. N., Pan, C. H. T., Smalley, A. J., Vohr, J. H., (1970), "Lubrication Phenomena in a Film of Low Kinematic Viscosity", Rev. Roum. Sci. Techn.-Méc. Appl., **15**(2), pp. 479-502.
- [67] Constantinescu, V. N., (1973), "Basic Relationships in Turbulent Lubrication and their Extension to Include Thermal Effects", ASME Journal of Lubrication Technology, **95**(2), pp. 147-154, doi: 10.1115/1.3451755.
- [68] Jakobsson, B., Floberg, L., (1957), "The Finite Journal Bearing, Considering Vaporization", Trans. Chalmers Univ. Tech. Gothenburg, Göteborg.
- [69] Olsson, K. O., (1965), "Cavitation in dynamically loaded journal bearings", Transactions of Chalmers University of Technology, Göteborg.
- [70] Elrod, H. G., Adams, M. L., (1974), "A computer program for cavitation and starvation problems", Proceedings of the 1st Leeds-Lyon Symposium of Tribology, Leeds, UK.
- [71] Elrod, H. G., (1981), "A Cavitation Algorithm", ASME Journal of Lubrication Technology, **103**(3), pp. 350-354, doi: 10.1115/1.3251669.
- [72] Fesanghary, M., Khonsari, M. M. (2011), "A Modification of the Switch Function in the Elrod Cavitation Algorithm", ASME Journal of Tribology, **133**(2), 024501, doi: 10.1115/1.4003484.
- [73] Hertz, H., (1882), „Über die Berührung fester elastischer Körper“, Journal für die reine und angewandte Mathematik, **92**, S. 156-171.
- [74] Gerdes, R. Fuchs, A., (1997), „Nachgiebigkeit in der Segmentabstützung von Radial-Kippsegmentlagern und deren Einfluss auf die Lagerkennwerte und das Schwingungsverhalten schnelllaufender Rotor-Lager-Systeme“, FVA-Heft-Nr. **511**, Frankfurt am Main.
- [75] Hagemann, T., Schwarze, H., (2017), „Programmdokumentation COMBROS R, Version 1.3, Teil I und II“, FVV/FVA Frankfurt am Main.
- [76] Tschoepe, D. P., Childs, D. W., (2014), "Measurements versus predictions for the static and dynamic characteristics of a four-pad, rocker-pivot, tilting-pad journal bearing", ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, **136**(5), 052501, doi: 10.1115/1.4026301.
- [77] Hagemann, T., Schwarze, H., (2015), "A Theoretical Study on Frequency Effects on Tilting-Pad Journal Bearing Dynamic Coefficients", In Proceedings of

- the 9th IFToMM International Conference on Rotor Dynamics, Springer, Cham, pp. 1069-1080.
- [78] Hagemann, T., Pfeiffer, P., Si, X., Zeh, C., Schwarze, H., (2016), „Einfluss der Ölzuführung auf die hydraulischen, energetischen und mechanischen Vorgänge in schnell laufenden und hoch belasteten Radialkippssegmentlagern“, FVA-Heft-Nr. **1184**, Frankfurt am Main.
- [79] Schlichting, H., Gersten, E., (2006), „Grenzschichttheorie“, 10. Auflage, Springer-Verlag, Berlin.
- [80] Blasius, H., (1908), „Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung“, Zeitschrift für Mathematik und Physik, **56**, S. 1-37.
- [81] Zemella, P., Schwarze, H., (2017), „Dynamische Radiallagersteifigkeit - Prüftechnikadaption zur Bestimmung der dynamischen Radialgleitlagersteifigkeit“, FVV-Heft-Nr. 1145, Frankfurt am Main.
- [82] Whittemore, H. L., Petrenko, S. N., (1921), „Friction and carrying capacity of ball and roller bearings“, Technologic Papers of the Bureau of Standards, **201**.
- [83] Kornhauser, M., (1951), „A note on elastic surface deformation“, Journal of applied mechanics – Transactions of the ASME, **18**(3), pp. 251-252.
- [84] Kunz, J., De Maria, E., (2002), „Die Abplattung im Kontaktproblem paralleler Zylinder“, Forschung im Ingenieurwesen **67**, Springer-Verlag, S. 146-156.
- [85] Kunert, K., (1961), „Spannungsverteilung im Halbraum bei elliptischer Flächenpressungsverteilung über einer rechteckigen Druckfläche“, Forschung im Ingenieurwesen **27**, Springer-Verlag, S. 165-174.
- [86] Hu, Y, Cheng, HS., Arai, T., Kobayashi, Y., Aoyama, S., (1994) “Numerical Simulation of Piston Ring in Mixed Lubrication—A Nonaxisymmetrical Analysis”. ASME Journal of Tribology, **116**(3): pp. 470-478. doi:10.1115/1.2928867.
- [87] Greenwood, J. A., Tripp, J. H., (1970), “The Contact of Two Nominally Flat Rough Surfaces”, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers; **185**(1), pp. 625-633, doi: 10.1243/PIME_PROC_1970_185_069_02.
- [88] Hagemann, T., Kukla, S., Schwarze, H., (2013), “Measurement and prediction of the static operating conditions of a large turbine tilting-pad bearing under high circumferential speeds and heavy loads”, Proceedings of the ASME Turbo Expo, doi: 10.1155/GT2013-95004, San Antonio, TX, USA.
- [89] Hagemann, T., Zeh, C., Pröhl, M., Schwarze, H., (2017), “The Impact of Convective Fluid Inertia Forces on Operation of Tilting-Pad Journal Bearings”, International Journal of Rotating Machinery, **2017**, doi: 10.1155/2017/5683763.
- [90] Zeh, C., Hagemann, T., Kraft, C., Schwarze, H., (2017), “Theoretical transient thermal studies on an eight-pad thrust bearing“, 16th EDF/Pprime Workshop, Futuroscope.
- [91] Morton, P. G. (1975), “Some Aspects of Thermal Instability in Generators”, G.E.C. Internal Report No. S/W40 u 183.
- [92] Rückert, A., (1992), „Experimentelle Überprüfung der Berechnungsgrundlagen für die Radialgleitlager von Turbomaschinen“, Fortschr.-Ber. VDI Reihe 1 Nr. **214**, Düsseldorf, VDI-Verlag.

- [93] Oertel, H. (Hrsg.), (2012), „Prandtl – Führer durch die Strömungslehre“, 13., überarbeitete Auflage, Springer Vieweg, Wiesbaden.
- [94] Prölß, M., (2015), „Störungsgleichungen zweiter Ordnung“, Interner Bericht, ITR, TU-Clausthal (unveröffentlicht).
- [95] Fingerle, A., Prölß, M., Otto, M., Hagemann, T., Abert, B., (2018), „Durchgängige Berechnung gleitgelagerter Welle-Lager-Systeme“, FVA-Heft-Nr. **1282**, Frankfurt am Main.
- [96] Vetter, D., Hagemann, T., Schwarze, H., (2018), „Potentials and limitations of an extended approximation method for nonlinear dynamic journal and thrust bearing forces“, Proceedings of the ASME Turbo Expo, doi: 10.1115/GT2018-75662, Oslo, Norway.
- [97] Rath, J-E., (2019), „Untersuchung und Optimierung von Näherungsverfahren zur dynamischen Tragkraftberechnung hydrodynamischer Radialgleitlager“, Projektarbeit TU-Clausthal.
- [98] Schüler, E., (2019), Schriftliche Auskunft auf eine Anfrage.
- [99] Weißbacher, C., Wittwer, B., Vetter, D., Burtscher, E., Schwarze, H., (2016), „Suppression of Self-Excited Vibrations through Bearing Profiling“, 19th International Seminar on Hydropower Plants, Vienna – Austria.
- [100] Glienicke, J., Lindloff, K., Medhioub, M., (1994), „Vorausberechnung des Betriebsverhaltens von Axialgleitlagern bei hohen Umfangsgeschwindigkeiten und hohen spezifischen Belastungen“, FVV-Heft-Nr. **638**, Frankfurt am Main.
- [101] Glienicke, J., Fuchs, A., Lutz, M., (1996), „Energetisch gekoppelte, nichtlineare Lagerschmierfilme mit instationären Randbedingungen“, FVV-Heft-Nr. **572**, Frankfurt am Main.